КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Цена 4 р. Пер. 1 р.



ЭВАРИСТ ГАЛУА

(1811—1832 г.).

Р 317/607 56кп 801-14/1060

ЭВАРИСТ

ГАЛУА

СОЧИНЕНИЯ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
Н. Н. МЕЙМАНА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ И С ПРИМЕЧАНИЯМИ
Н. Г. ЧЕБОТАРЕВА

С ПРИЛОЖЕНИЕМ СТАТЬИ
П. ДЮПЮИ

ЖИЗНЬ ЭВАРИСТА ГАЛУА

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ И ТЕХНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

Т 11-5-4
ТКК № 67


2007043659


37-4035

Переплет, титула, шмуцтитула и шапки работы художника В. И. СМИРНОВА
Редакция Г. Ф. РЫБКИНА
Оформление Э. М. БЕЙЛИНОЙ
Корректор А. Н. КРУТОВ
Наблюдал за выпуском В. Т. ТИМОФЕЕВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Жизнь и творчество Эвариста Галуа (Évariste Galois, 1811—1832) представляют собой совершенно исключительное в истории науки явление. Молодой человек, не достигший 21 г., совершает в математике переворот, ставя ее на совершенно новые рельсы. Исследуя вопрос об условиях разрешимости алгебраических уравнений в радикалах [невозможность такого решения для произвольного уравнения степени выше четвертой была незадолго до этого доказана Абелем (Niels-Henrik Abel, 1802—1829)], он дает полное его принципиальное решение. Полученные им результаты позволяют решить для всякого заданного уравнения при помощи конечного числа действий вопрос, разрешается ли оно в радикалах. Но несравненно бóльшую ценность для математики имеет построенный им аппарат, при помощи которого он достиг своих результатов. Выражаясь современным языком, Галуа предложил изучать структуру *алгебраических полей*, сопоставляя с ними структуру *групп* конечного числа символов (подстановок), допускающих своеобразные законы действий над ними. Из других принципиальных вопросов алгебры теория Галуа позволила разрешить вопрос о возможности или невозможности

решить данную задачу с помощью циркуля и линейки. Этим путем была доказана невозможность трисекции произвольного угла. Теория групп позволила классифицировать алгебраические иррациональности наиболее естественным путем, а для наиболее простых по структуре иррациональностей — устанавливать их арифметическую природу (например теорема Кронекера-Вебера: корни уравнений с коммутативной группой рационально выражаются через корни из единицы). В соединении с теорией *алгебраических чисел* и *идеалов* теория Галуа позволила исследовать дальнейшие глубокие свойства иррациональностей (комплексное умножение эллиптических функций, Klassenkörper), составляющие самую высшую и трудную часть современной теории алгебраических чисел.

Все перечисленные результаты относятся к алгебре. Но созданное Галуа понятие группы проникло во все отделы современной математики, коренным образом изменив ее лицо. Я позволю себе наметить некоторые отделы математики, в которых теория групп играет особенно важную роль.

Конечные группы Кроме теории Галуа в узком смысле этого понятия [1]), они играют роль в теории правильных многогранников в многомерных пространствах, имея связь с кристаллографией. Основной здесь является теорема Жордана о существенной конечности числа конечных линейных групп заданного измерения. Эта теорема имеет также приложения в вопросе об алгебраических интегралах линейных диференциальных уравнений.

---

[1]) В которой наиболее важные результаты принадлежат Камиллу Жордану (Camille Jordan, 1838—1922). Они изложены в его знаменитой книге „Traité des Substitutions“, Paris 1870.

Эти группы играют также (несколько меньшую) роль в алгебраических функциях (римановы поверхности).

Дискретные бесконечные группы. Этот тип групп, наименее изученный, тем не менее лежит в основе нескольких важных отделов анализа и геометрии.

Теория аналитических функций, а именно изучение важного класса автоморфных функций, привела Пуанкаре и Клейна к построению теории групп дробных линейных преобразований. Сюда же можно отнести аналитическую теорию линейных диференциальных уравнений, в которой недавно покойный Лаппо-Данилевский получил фундаментальные результаты.

Топология. Каждый топологический образ характеризуется в известной мере своей *фундаментальной группой*, в общем случае бесконечной. Всякий прогресс в теории бесконечных групп должен поэтому отразиться на состоянии *комбинаторной топологии*, находящейся до сих пор в младенческой стадии своего развития. В настоящее время в комбинаторной топологии хорошо изучены только *гомологии*, связанные с абелевыми (коммутативными) факторгруппами фундаментальных групп и позволяющие исследовать некоторые поверхностные свойства топологических образов.

Особенно большую роль играют группы в отделе топологии, носящем название *теории узлов*. Занимаясь частными типами узлов — *косами*, — Артин создал для них групповую теорию, характеризующую их в полной мере; однако дальнейшие успехи в ней тормозятся в силу наших слабых познаний в теории бесконечных групп.

Прогресс в этих отделах математики связан с именем Галуа не только потому, что опирается на группы, но, главным образом, потому, что фундаментальные группы имеют в топологических образах ту же функцию, какую группа Галуа имеет в алгебраических полях.

Непрерывные группы. Это понятие было создано знаменитым норвежским математиком Софусом Ли (Sophus Lie, 1842—1899) под влиянием идей Галуа, которыми Ли проникся, работая в Париже под руководством Камилла Жордана. Первоначальным поводом к созданию теории непрерывных групп послужило желание перенести методы Галуа на теорию диференциальных уравнений, проблему их интегрирования. Но область приложения непрерывных групп оказалась несравненно шире. Одним из важнейших приложений их теории было выяснение смысла существования геометрии, как независимой от анализа науки, и классификация всех систем геометрии на основе непрерывных групп, связанных с каждой из этих систем. Эта идея впервые была высказана в Эрлангенской программе Феликса Клейна (Felix Klein, 1849—1925).

В настоящее время теория непрерывных групп хорошо изучена и непрерывно продолжает развиваться. В самое последнее время она нашла себе новую грандиозную область приложений. Открытия де-Бройля, Шредингера, Дирака и др. в квантовой механике и теории структуры материи показали, что современная физика должна опираться на теорию непрерывных групп и притом на те отделы, которые в позднейшее время были разработаны Картаном, Вейлем и др., — теорию представления групп линейными операторами, теорию характеров и т. п.

Таково влияние идей Галуа на современную математику. Поэтому естественно со стороны каждого образованного математика ознакомиться с тем, как зародились эти идеи, в каком виде они были представлены у самого Галуа.

Немалый также интерес для историка представляет собой жизнь Галуа. Эта недолгая жизнь протекла исключительно бурно, тесно соприкасаясь с напряженной политической жизнью Франции той эпохи — последние годы реставрации (Карл X) и первые годы царствования Людовика-Филиппа. Будучи уволен из Нормальной школы за газетное выступление против ее директора, игравшего двуличную роль во время июльского переворота (1830), Галуа пытается основать свою школу, где предполагает обучать желающих новым идеям алгебры и теории эллиптических функций, но скоро политическая жизнь страны вовлекает его в свой водоворот.

Принимая активное участие в нелегальной политической организации и публично выступая против короля Людовика-Филиппа, Галуа непрерывно подвергался преследованиям королевской полиции и неоднократно сидел в тюрьмах. Кончил жизнь на дуэли, причины которой остаются до сих пор неясными. Существует подозрение, что дуэль была спровоцирована королевскими агентами, желавшими избавиться от своего беспокойного и опасного врага.

Издание сочинений и биографии Галуа, предпринятое Объединенным научно-техническим издательством, является вполне своевременным (лучше, правда, было бы издать их в 1932 г., в столетнюю годовщину смерти Галуа). В этом издании я не мог по понятным техническим причинам выполнить требования, предъявляемые к так называемым академическим изданиям (критическое сличение текста с подлинником; розыски неопубликованных работ Галуа; самостоятельные биографические исследования или сличение различных биографий Галуа). Текст статей Галуа взят непосредственно из издания его сочинений, вышедшего в Париже в 1897 г. под редакцией Пикара. Я присоединил к этому перевод отрывков из наследия Галуа, опубликованных Ж. Таннери в 1906—1907 гг. в Bulletin des Sciences Mathémati-

ques; к сожалению, не имея в своем распоряжении подлинников рукописей Галуа, я не мог критически подойти к выбору и расположению этих отрывков в публикации Ж. Таннери. Весь этот текст снабжен мной примечаниями, имеющими цель, с одной стороны, облегчить чтение сочинений Галуа начинающим читателям и приблизить рассуждения Галуа к современным (все-таки знакомства читателя с теорией Галуа, хотя бы по одному из элементарных курсов, я вынужден потребовать,— иначе пришлось бы изложить в примечаниях полный курс теории Галуа); с другой стороны, я в своих примечаниях стремился указывать, каких результатов добились современные математики в направлениях, намеченных в беглых фразах Галуа, а также отмечать и частью исправлять встречающиеся у Галуа ошибки (можно ли эти ошибки поставить в вину гению, предначертавшему путь современной математики, но имевшему слишком мало времени для обработки своих идей?). Здесь я подчеркну особую важность предсмертного письма Галуа к его другу Огюсту Шевалье, письма, полного глубочайшего внутреннего трагизма, сквозящего между строк, — скорби об идеях, непонятых современниками и обреченных по внешним причинам оставаться неразработанными, и твердой уверенности в их правильности и важности. В этом изумительном письме приводятся результаты частью в четкой форме, частью лишь в туманных очертаниях, результаты, которые через 25 или даже 50 лет должны были вновь быть открыты величайшими математиками позднейшей эпохи. Это, главным образом, относится к абелевым интегралам. Что я мог, я старался разъяснить или указать на связь с позднейшими исследованиями. Многое в моих примечаниях является лишь попыткой приоткрыть завесу таинственности в утверждениях Галуа. Может быть, не все согласятся с моими толкованиями. Я сделал, что мог, и буду приветствовать всякую новую попытку комментировать это трудное для понимания письмо.

В издание включен также (с некоторыми сокращениями и исправлениями) очерк жизни Галуа, написанный французским историком Дюпюи (Dupuy). Вряд ли можно считать удовлетворительным освещение автором политических взглядов и деятельности Эвариста Галуа. В ряде мест проскальзывает склонность объяснить участие Галуа в революционном движении его личными невзгодами и юношеской горячностью. Сами неудачи, преследовавшие Галуа, автор избегает ставить в связь с общественным строем, давившим и душившим таланты. Но среди имеющихся биографий Галуа статья Дюпюи является наиболее подробной и, можно смело сказать, лучшей. В этой статье собрано много интересного материала, связанного с жизнью Галуа; к ней приложено несколько относящихся к Галуа документов. Среди школьных характеристик, полицейских рапортов и т. п., ни словом не упоминающих о математической ценности Галуа, мы находим документ, впервые с большой теплотой и уважением отзывающийся о нем, как о выдающемся математике. Это — протокол медицинского вскрытия Галуа. Факт, не лишенный драматизма!

Я позволю себе сделать маленькое сопоставление: редактор французского издания сочинений Галуа пишет в своем предисловии: „Влияние Галуа, если бы он жил, в большой мере изменило бы ориентацию математических исследований в нашей стране“. Я боюсь, что если бы мы перешли на сослагательное наклонение в истории, то нам пришлось бы добавить еще несколько „если бы“. Но можно сказать с уверенностью, что

и при настоящем положении вещей влияние Галуа изменило лицо математики во всем мире.

В издание включена также моя статья о современных проблемах теории Галуа, написанная несколько лет тому назад. В этой статье характеризуется в известной мере современное направление в алгебре, опирающееся на идеи Галуа. Статья не претендует на объективность и не касается влияния идей Галуа на другие отделы математики. В этом отношении должна быть интересной статья Софуса Ли в „Livre du centenaire de l'École Normale", и мне очень жаль, что она осталась мне недоступной.

Я надеюсь, что настоящее издание удовлетворит многие запросы читателей, интересующихся жизнью и творчеством великого математика, и послужит материалом для будущего издания, более исчерпывающего. Может быть, читателя поразит непропорционально малый объем самих статей Галуа по сравнению с объемом всего издания. На это можно ответить, что таково же соотношение между продолжительностью жизни Галуа и ценностью его творчества.

Мое участие в этом издании выразилось в редактировании „Сочинений Галуа" и составлении примечаний. Редакция „Жизни Эвариста Галуа" проведена преподавателем французского языка в Казанском государственном университете Н. П. Каширской. Перевод был сделан Н. Н. Мейманом.

Я позволю себе выразить глубокую благодарность сотрудникам Анатомического музея Казанского государственного медицинского института проф. В. О. Бику и д-ру В. Н. Мурату за ценные указания при редактировании перевода „Протокола вскрытия Галуа".

Н. Чеботарев.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

ГАЛУА

СТАТЬИ
ОПУБЛИКОВАННЫЕ
ГАЛУА

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ [1])

Известно, что если по методу Лагранжа раскладывать в непрерывную дробь корень уравнения второй степени, то эта непрерывная дробь будет периодической и, что то же, будет иметь место для корня уравнения любой степени, если этот корень является корнем рационального множителя второй степени предложенного уравнения. В этом случае уравнение имеет по меньшей мере еще один периодический корень. И в том и в другом случае непрерывная дробь может быть, впрочем, чисто периодической или смешанной, но в случае, когда последнее обстоятельство имеет место, существует хотя бы одно преобразование, при котором один из корней становится чисто периодическим.

---

[1]) Annales de Mathématiques de M. Gergonne, т. XIX, стр. 294, 1828—1829.

Когда некоторое уравнение имеет два периодических корня, соответствующих одному рациональному множителю второй степени, то между этими двумя корнями существует довольно странное соотношение, которое, кажется, еще не было отмечено; оно может быть выражено в виде следующей теоремы.

Теорема. *Если один из корней некоторого уравнения какой-нибудь степени представляет собой чисто периодическую непрерывную дробь, то уравнение непременно имеет другой периодический корень, получающийся делением отрицательной единицы на непрерывную дробь, написанную в обратном порядке.*

Доказательство. — Для определенности возьмем период в четыре члена, так как ход вычисления показывает, что тот же результат получится и при допущении большего числа членов в периоде. Пусть один из корней некоторого уравнения какой-нибудь степени выражается так:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ddots}}}}}}}$$

Уравнение второй степени, которому принадлежит этот корень, и который, следовательно, содержит его

сопряженный корень, будет

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}}},$$

откуда последовательно получаем:

$$a - x = -\cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}}},$$

$$\frac{1}{a-x} = -b - \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}},$$

$$b + \frac{1}{a-x} = -\cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}},$$

$$\cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a-x}} = -c - \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}},$$

$$c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a-x}} = -\cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}},$$

$$\cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a-x}}} = -d - \frac{1}{x},$$

$$d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}}=-\frac{1}{x},$$

$$\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}}}=-x,$$

т. е.

$$x=-\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a-x}}}}.$$

Это, следовательно, — опять уравнение второй степени, которое дает оба корня, о которых идет речь; но, неограниченно подставляя в правую часть значение x, мы получаем

$$x=-\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\ddots}}}}}}}};$$

это, стало быть, — второе значение x, определяемое этим уравнением; как видим, оно равно —1, деленной на первое значение, написанное в обратном порядке.

В предыдущем мы предполагали, что рассматриваемый корень больше единицы; но если

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ddots}}}}}}}},$$

то заключаем, что для одного из значений $\frac{1}{x}$ имеет место

$$\frac{1}{x}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ddots}}}}}}},$$

и по предыдущему другое значение $\frac{1}{x}$ будет

$$\frac{1}{x}=-\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\ddots}}}}}}}},$$

откуда выводим для другого значения x,

$$x = -d - \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \ldots}}}}}}},$$

или

$$x = -1 : \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \ldots}}}}}}}},$$

что опять точно соответствует нашей теореме.

Пусть A — какая-нибудь чисто периодическая непрерывная дробь, а B — непрерывная дробь, которая получается при перестановке периода в обратном порядке. Мы видели, что если $x = A$ — один из корней некоторого уравнения, то оно непременно имеет и корень $x = -\frac{1}{B}$. Если A положительно и больше единицы, то $-\frac{1}{B}$ отрицательно и заключается между 0 и -1; и, обратно, если A отрицательно и заключается между 0 и -1, то $-\frac{1}{B}$ положительное число, большее единицы. Таким образом, когда один из

корней уравнения второй степени есть чисто периодическая непрерывная дробь, бóльшая единицы, второй корень непременно заключается между 0 и -1; и, наоборот, если первый корень заключается между 0 и -1, то второй непременно положителен и больше единицы.

Можно доказать, что, обратно, если один из двух корней уравнения второй степени положителен и больше единицы, а второй заключается между 0 и -1, то эти корни выражаются в чисто периодических непрерывных дробях. Действительно, пусть все время A — некоторая чисто периодическая непрерывная дробь, положительная и бóльшая единицы, а B — чисто периодическая непрерывная дробь, получаемая из A обращением периода, также положительная и бóльшая, чем единица. Первый из данных корней не может иметь формы

$$x = p + \frac{1}{A},$$

так как тогда в силу нашей теоремы второй корень должен быть

$$x = p + \cfrac{1}{-\cfrac{1}{B}} = p - B,$$

а $p - B$ будет заключаться между 0 и -1 лишь тогда, когда целая часть B равна p, в каковом случае первое значение будет чисто периодическим. Первое значение x, кроме того, не может быть равно $x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{A}}$, так как тогда другим значением

будет

$$x = p + \frac{1}{q - B} \quad \text{или} \quad x = p - \frac{1}{B - q};$$

но чтобы это значение заключалось между 0 и -1, необходимо прежде всего, чтобы $\frac{1}{B-q}$ равнялось p плюс некоторая дробь. Необходимо, следовательно, чтобы $B - q$ было меньше единицы, а это требует, чтобы B было равно q плюс некоторая дробь; откуда видно, что p и q должны быть соответственно равны двум первым членам периода B или двум последним членам периода A; так что, вопреки предположению, значение $x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{A}}$ будет чисто периодическим. Аналогичным рассуждением докажем, что периоду не может предшествовать бóльшее число членов, не являющихся его частью.

Стало быть, если мы исследуем численное уравнение по методу Лагранжа, то можно быть уверенным, что оно не имеет периодических корней, если только мы не встретим преобразованного уравнения [1] [1]), имеющего по крайней мере один положительный корень, больший единицы, и другой корень, заключенный между 0 и -1; в самом деле, если корень, за которым мы следим, должен быть периодическим, то периоды начнутся не ранее, чем с этого преобразованного уравнения.

[1]) Цифры в квадратных скобках относятся к примечаниям редактора, помещенным после работ Галуа, стр. 137 и сл.

Если один из корней уравнения второй степени не только чисто периодичен, но и симметричен, т. е. если члены (неполные частные) периода, находящиеся на одинаковом расстоянии от концов, равны, то $B = A$, так что эти два корня будут A и $-\frac{1}{A}$; уравнение, следовательно, будет вида

$$Ax^2 - (A^2 - 1)x - A = 0.$$

Обратно, все уравнения второй степени вида

$$ax^2 - bx - a = 0$$

имеют чисто периодические и симметричные корни. Действительно, подставляя по очереди вместо x бесконечность и -1, получим положительные результаты, тогда как, делая $x = 1$ и $x = 0$, получим отрицательные результаты; откуда видно, прежде всего, что это уравнение имеет один положительный корень, больший единицы, и один отрицательный корень, заключающийся между 0 и -1 и, следовательно, эти корни чисто периодические; более того, это уравнение не меняется при замене x на $-\frac{1}{x}$, откуда следует, что если A — один из корней, то другой равен $-\frac{1}{A}$ и, следовательно, в этом случае $B = A$.

Применим эти общие рассуждения к уравнению второй степени

$$3x^2 - 16x + 18 = 0.$$

Найдем сначала его корень, заключающийся между 3 и 4. Полагая

$$x = 3 + \frac{1}{y},$$

получим преобразованное уравнение

$$3y^2 - 2y - 3 = 0,$$

по форме которого мы узнаем, что значение y чисто периодическое и симметричное. Действительно, полагая поочередно

$$y = 1 + \frac{1}{z}, \quad z = 2 + \frac{1}{t}, \quad t = 1 + \frac{1}{u},$$

получим преобразованные уравнения

$$2z^2 - 4z - 3 = 0, \quad 3t^2 - 4t - 2 = 0,$$
$$3u^2 - 2u - 3 = 0.$$

Идентичность уравнений в u и y доказывает, что положительное значение y есть

$$y = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}},$$

его отрицательное значение будет, следовательно,

$$y = -\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}},$$

Пара значений x будет, следовательно,

$$x = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}},$$

$$x = 3 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}},$$

из которых последнее в силу известной формулы

$$p - \frac{1}{q} = p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - 1}},$$

преобразуется так:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}}}.$$

ЗАМЕТКИ ПО НЕКОТОРЫМ ПУНКТАМ АНАЛИЗА [1])

§ I. *ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ АНАЛИЗА* [2]

Теорема. *Пусть Fx и fx — две какие-нибудь данные функции. Каковы бы ни были x и h, будем иметь*

$$\frac{F(x+h)-Fx}{f(x+h)-fx}=\varphi(k),$$

где φ — некоторая определенная функция, а k — промежуточная между x и $x+h$ величина.

Доказательство. Действительно, полагая

$$\frac{F(x+h)-Fx}{f(x+h)-fx}=P,$$

выводим

$$F(x+h)-Pf(x+h)=Fx-Pfx,$$

откуда видно, что функция $Fx-Pfx$ не изменяется при замене x на $x+h$; отсюда следует, что если она не остается постоянной в этих пределах, что может иметь место лишь в исключительных случаях, то эта функция имеет между x и $x+h$ один или несколько максимумов и минимумов. Пусть k — значение x, соответствующее одному из них. Очевидно, $k=\psi(P)$, где ψ — некоторая определенная функция. Следовательно, должно также быть $P=\varphi(k)$, где φ — некоторая другая тоже определенная функция; это доказывает теорему.

Отсюда можно вывести, как следствие, что количество

$$\lim\frac{F(x+h)-Fx}{f(x+h)-fx}=\varphi(x),$$

для $h=0$, есть непременно некоторая функция от x, что доказывает a priori существование производных функций.

§ II. *РАДИУС КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ*

Радиус кривизны кривой в какой-нибудь из ее точек M — это перпендикуляр, опущенный из этой точки на пересечение нормальной плоскости в точке M с соседней нормальной плоскостью, как в этом легко убедиться геометрическим рассмотрением.

[1]) Annales de Mathématiques de M. Gergonne, т. XXI, стр. 182, 1830—1831. Ошибочно напечатано: *Galais, ученик Нормальной школы, вместо Galois.* (Лиувилль.)

Пусть теперь (x, y, z) будет точка кривой. Известно, что нормальная плоскость в этой точке имеет уравнение

$$(X-x)\frac{dx}{ds}+(Y-y)\frac{dy}{ds}+(Z-z)\frac{dz}{ds}=0, \quad (N)$$

где X, Y, Z — символы текущих координат. Пересечение этой нормальной плоскости с соседней нормальной плоскостью дается системой этого уравнения со следующим:

$$(X-x)\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}+(Y-y)\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}+$$
$$+(Z-z)\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}=1, \quad (1)$$

причем

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

Легко видеть, что плоскость (1) перпендикулярна к плоскости (N), так как

$$\frac{dx}{ds}\,d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}\,d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dz}{ds}\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Следовательно, перпендикуляр, опущенный из точки (x, y, z) на пересечение плоскостей (N) и (1), есть не что иное, как перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость (1). Следовательно, радиус кривизны есть перпендикуляр, опущенный из точки (x, y, z) на плоскость (1). Это рассуждение дает очень просто известные теоремы о радиусе кривизны пространственных кривых.

АНАЛИЗ ОДНОГО МЕМУАРА ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ [1])

Уравнение называется непримитивным, если, будучи, например, степени mn, оно разлагается на m множителей n-й степени посредством одного единственного уравнения степени m. Таковы уравнения Гаусса. Примитивные уравнения — это уравнения, не допускающие подобного упрощения. Рассматривая примитивные уравнения, я пришел к следующим результатам:

1. Для того чтобы уравнение простой степени разрешалось в радикалах, необходимо и достаточно, чтобы при знании двух каких-нибудь его корней остальные выводились из них рационально.

2. Для того чтобы примитивное уравнение степени m разрешалось в радикалах, необходимо, чтобы $m=p^\nu$, где p — простое число.

---

[1]) Bulletin des Sciences mathématiques de M. Férussac, т. XIII, стр. 271 (1830, апрельская тетрадь).

3. Исключая случаи, упомянутые ниже, для того чтобы примитивное уравнение степени p^ν разрешалось в радикалах, необходимо, чтобы при знании двух каких-нибудь его корней, остальные выводились из них рационально [3].

Из предыдущего правила исключаются следующие особые случаи:

1) случай $m = p^\nu = 9, = 25$;

2) случай $m = p^\nu = 4$, и вообще случай, когда a^α является делителем $\frac{p^\nu - 1}{p - 1}$, где a — простое число, и

$$\frac{p^\nu - 1}{a^\alpha (p-1)} \nu = p \pmod{a^\alpha}.$$

Эти случаи, однако, весьма мало отклоняются от общего правила.

Когда $m = 9, = 25$, уравнение должно принадлежать к типу уравнений, определяющих трисекцию и квинтсекцию эллиптических функций [4].

Во втором случае при знании двух каких-нибудь корней остальные всегда должны из них выводиться, хотя бы с помощью некоторого числа радикалов степени p, равного числу таких делителей a^α выражения $\frac{p^\nu - 1}{p - 1}$, что

$$\frac{p^\nu - 1}{a^\alpha (p-1)} \nu = p \pmod{a^\alpha},$$

a — простое.

Все эти предложения выводятся из теории перестановок.

Вот другие результаты, вытекающие из моей теории:

1. Пусть k — модуль эллиптической функции, p — данное простое число, большее трех; для того чтобы уравнение степени $p + 1$, дающее различные модули функции, преобразованной относительно числа p, разрешалось в радикалах, *необходимо* одно из двух: либо один из корней рационально известен, либо все они рациональные функции друг от друга. Здесь идет речь, разумеется, только об особых значениях модуля k. Очевидно, что эти условия вообще не имеют места. Это правило не имеет места для $p = 5$.

2. Замечательно, что общее модулярное уравнение шестой степени, соответствующее числу 5, возможно снизить до уравнения пятой степени, к которому оно сводится. Напротив, для высших степеней модулярное уравнение не может быть понижено [1]).

---

[1]) Это утверждение не вполне точно, как сам Галуа признается в своем письме к Огюсту Шевалье, помещенном ниже. Вообще по поводу статьи, которую мы воспроизводим, он говорит: „Условие, которое я указал в Bulletin de Férussac для разрешимости уравнений в радикалах, слишком узко; исключений немного, но они имеются“. В частности, что касается модулярных уравнений, то он утверждает, что понижение степени $p + 1$ до p возможно не только для $p = 5$, но еще для $p = 7$ и $p = 11$; но он настаивает на невозможности этого при $p > 11$. (Лиувилль.)

ЗАМЕТКА
О РЕШЕНИИ ЧИСЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ [1])

Лежандр первый заметил, что когда алгебраическое уравнение взято в форме

$$\varphi x = x,$$

где φx — функция от x, постоянно возрастающая вместе с x, то легко найти корень этого уравнения, непосредственно меньший данного числа a, если $\varphi a < a$, и корень, непосредственно больший a, если $\varphi a > a$.

Для доказательства построим кривую $y = \varphi x$ и прямую $y = x$. Возьмем абсциссу, равную a, и предположим для определенности, что $\varphi a > a$. Я утверждаю, что легко получить корень, непосредственно больший a. Действительно, корни уравнения $\varphi x = x$ суть не что иное, как абсциссы точек пересечения прямой с кривой, и ясно, что мы подходим более близко к пересечению, подставляя вместо абсциссы a абсциссу φa. Получим еще более близкое значение, беря $\varphi\varphi a$, затем $\varphi\varphi\varphi a$, и т. д.

Пусть $Fx = 0$ — данное уравнение степени n и $Fx = X - Y$, причем X и Y содержат только положительные члены. Лежандр берет уравнение последовательно в двух формах:

$$x = \varphi x = \sqrt[n]{\frac{X}{\left(\frac{Y}{x^n}\right)}}, \quad x = \psi x = \sqrt[n]{\frac{X}{\left(\frac{x^n}{Y}\right)}}.$$

Из двух функций φx и ψx всегда, как это видно, одна больше, другая меньше, чем x. Таким образом с помощью этих двух функций можно получить два корня уравнения, наиболее близкие к данному числу a, один больший, а другой меньший.

Но этот метод неудобен вследствие необходимости извлечения корня n-й степени при каждой операции. Вот две более удобные формы. Найдем такое число k, что функция

$$x + \frac{Fx}{kx^n}$$

растет с x, когда $x > 1$. (Действительно, достаточно уметь находить корни уравнения, бóльшие единицы.)

Мы будем иметь при наложенном условии

$$1 + \frac{d\frac{X - Y}{kx^n}}{dx} > 0$$

[1]) Bulletin des Sciences mathématiques de M. Férussac, т. XIII, стр. 413 (1830, июньская тетрадь).

или

$$1-\frac{nX-xX'}{kx^{n+1}}+\frac{nY-xY'}{kx^{n+1}}>0;$$

но так как тождественно

$$nX-xX'>0, \quad nY-xY'>0,$$

то достаточно положить

$$\frac{nX-xX'}{kx^{n+1}}<1 \quad \text{для} \quad x>1,$$

а для этого достаточно взять для k значение функции $nX-xX'$ при $x=1$.

Так же найдем такое число h, что функция

$$x-\frac{Fx}{hx^n}$$

растет вместе с x, когда $x>1$; для этого переставим Y и X.

Таким образом уравнение можно представить в одной из форм

$$x=x+\frac{Fx}{kx^n}, \qquad x=x-\frac{Fx}{hx^n},$$

которые обе рациональны и доставляют легкий метод решения.

ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ [1])

Если условливаются рассматривать как нули все количества, которые в алгебраическом исчислении находятся умножением на данное простое число p, и ищут при этом условии решения алгебраического уравнения $Fx=0$ (то, что Гаусс обозначает знаком $Fx\equiv 0$), то обычно рассматривают только целые решения. Будучи приведен особыми исследованиями к рассмотрению несоизмеримых решений, я пришел к нескольким новым, как я думаю, результатам.

Пусть $Fx=0$ будет такого рода уравнение или сравнение, и p — модуль. Предположим сначала для большей простоты, что это сравнение не допускает

---

[1]) Bulletin des Sciences mathématiques de M. Férussac, т. XIII, стр. 428 (1830, июньская тетрадь); снабжено следующим примечанием: „Настоящий мемуар составляет часть исследований г. Галуа по теории перестановок и алгебраических уравнений“. (Лиувилль.)

никакого соизмеримого множителя, т. е. что нельзя найти трех таких функций φx, ψx, χx, что

$$\varphi x \cdot \psi x = Fx + p \cdot \chi x.$$

Следовательно, в этом случае сравнение не допускает никакого целого корня, и даже никакого несоизмеримого корня более низкой степени. Но тогда корни этого сравнения нужно рассматривать как род воображаемых символов, так как они не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к целым числам; роль этих символов в исчислении будет часто столь же полезной, как роль воображаемого $\sqrt{-1}$ в обычном анализе.

Классификацией этих чисел и сведением их к возможно меньшему количеству мы и займемся.

Назовем через i один из корней сравнения $Fx = 0$, которое мы предположим степени ν.

Рассмотрим общее выражение

$$a + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots + a_{\nu-1} i^{\nu-1}, \qquad \text{(A)}$$

где a, a_1, a_2, $\ldots$, $a_{\nu-1}$ представляют целые числа. Если мы будем давать этим числам все значения, то выражение (A) примет p^ν значений, которые обладают, как я сейчас покажу, теми же свойствами, что и натуральные числа в *теории степенных вычетов*.

Выражение (A) принимает только $p^\nu - 1$ значений, если a, a_1, a_2, $\ldots$, $a_{\nu-1}$ не обращаются все в нуль: пусть α — одно из этих значений.

Если последовательно возвышать α во вторую, третью, ... степени, то получим последовательность количеств той же формы (так как всякая функция от i может быть приведена к $(\nu-1)$-й степени). Следовательно, должно быть $\alpha^n = 1$, где n — некоторое число. Пусть n — наименьшее из таких чисел, что $\alpha^n = 1$. Имеем совокупность n различных выражений:

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{n-1}.$$

Умножим эти n количеств на некоторое другое выражение β такой же формы. Мы получим новую группу количеств, отличных от первых и различных между собой. Если количества (A) еще не исчерпаны, умножаем степени α на новое выражение γ и т. д. Итак, мы видим, что число n непременно делит общее число количеств (A). Так как это последнее число равно $p^\nu - 1$, то мы видим, что n делит $p^\nu - 1$. Отсюда следует, что имеет место

$$\alpha^{p^\nu - 1} = 1 \quad \text{или} \quad \alpha^{p^\nu} = \alpha.$$

Затем доказывается, как в теории чисел [5], что имеются первообразные корни α, для которых точно $p^\nu - 1 = n$ и которые, следовательно, воспроизводят при возведении в степень всю последовательность остальных корней.

При этом какой-нибудь из этих первообразных корней зависит от одного *неприводимого* сравнения степени ν, без чего сравнение в i не было бы непри-

водимым, так как все корни сравнения в i суть степени первообразного корня.

Отсюда вытекает замечательное следствие, что все алгебраические количества, которые могут встретиться в этой теории, суть корни уравнения формы

$$x^{p^\nu} = x.$$

Это свойство, выраженное алгебраически, таково:

Пусть даны функция Fx и простое число p; тогда можно положить

$$fx \cdot Fx = x^{p^\nu} - x + p \cdot \varphi x,$$

где fx и φx — целые функции, каждый раз, когда сравнение $Fx = 0 \pmod p$ неприводимо. Если хотим получить все корни подобного сравнения с помощью одного, то достаточно заметить, что вообще имеет место

$$(Fx)^{p^n} = F(x^{p^n}),$$

и, следовательно, если x — один из корней, то другие будут

$$x^p,\ x^{p^2},\ \ldots,\ x^{p^{\nu-1}}$$ [1].

---

[1]) Из того, что корни неприводимого сравнения степени ν

$$Fx = 0$$

выражаются последовательностью

$$x,\ x^p,\ x^{p^2},\ \ldots,\ x^{p^{\nu-1}},$$

было бы неправильно заключать, что эти корни всегда выражаются в радикалах. Вот пример противоположного:

Теперь речь идет о том, чтобы показать, что, обратно только что сказанному, все корни уравнения или сравнения $x^{p^\nu} = x$ зависят от одного единственного сравнения степени ν.

Действительно, пусть i такой корень неприводимого сравнения, что все корни сравнения $x^{p^\nu} = x$ суть рациональные функции от i (ясно, что здесь, как и в обычных уравнениях, это свойство имеет место) [1].

Прежде всего очевидно, что степень μ сравнения в i не может быть меньше ν, без чего сравнение

$$x^{p^{\nu-1}} - 1 = 0, \qquad (\nu)$$

имело бы все свои корни общими со сравнением

$$x^{p^{\mu-1}} - 1 = 0,$$

Неприводимое уравнение

$$x^2 + x + 1 = 0 \pmod 2$$

дает

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

что сводится к

$$\frac{0}{0} \pmod 2,$$

формуле, ничего не выражающей. (*Э. Г.*) [6].

[1]) Общую теорему, о которой здесь идеть речь, можно выразить так: пусть дано алгебраическое уравнение, можно найти такую рациональную функцию θ от всех его корней, что, обратно, каждый корень рационально выражается через θ. Эта теорема была известна Абелю, как это можно видеть из первой части мемуара по эллиптическим функциям, оставленного знаменитым геометром. (*Э. Г.*)

что абсурдно, так как сравнение (ν) не имеет равных корней, как это видно, если взять производную от первого члена. Я утверждаю теперь, что μ не может быть $> \nu$.

Действительно, если бы это было так, то все корни сравнения

$$x^{p^\mu} = x$$

должны были бы рационально зависеть от корня сравнения

$$x^{p^\nu} = x.$$

Но легко видеть, что если

$$i^{p^\nu} = i,$$

то всякая рациональная функция $h = fi$ дает также

$$(fi)^{p^\nu} = f(i^{p^\nu}) = f(i), \text{ откуда } h^{p^\nu} = h.$$

Следовательно, все корни сравнения $x^{p^\mu} = x$ будут общими с корнями уравнения $x^{p^\nu} = x$, что является абсурдом.

Итак, мы, наконец, знаем, что все корни уравнения или сравнения $x^{p^\nu} = x$ непременно зависят от *одного* единственного *неприводимого* сравнения степени ν.

Теперь наиболее общий метод получения неприводимого сравнения, от которого зависят корни сравнения $x^{p^\nu} = x$, состоит в освобождении этого сравнения сперва от всех общих множителей, которые оно может иметь со сравнениями низшей степени вида

$$x^{p^\mu} = x.$$

Таким образом получится сравнение, которое должно разлагаться на неприводимые сравнения степени ν. И так как мы умеем выражать все корни каждого из этих неприводимых сравнений через один, их все легко будет получить по методу Гаусса.

Однако чаще всего легко путем подбора найти одно неприводимое сравнение данной степени ν, а от него нужно получить все остальные.

Пусть, например, $p = 7$, $\nu = 3$. Ищем корни сравнения

$$x^{7^3} = x \pmod 7. \qquad (1)$$

Я замечаю, что так как сравнение

$$i^3 = 2 \pmod 7 \qquad (2)$$

неприводимо и третьей степени, то все корни сравнения (1) рационально зависят от корней сравнения (2) таким образом, что все корни (1) имеют форму

$$a + a_1 i + a_2 i^2, \text{ или } a + a_1 \sqrt[3]{2} + a_2 \sqrt[3]{4}. \qquad (3)$$

Теперь нужно найти первообразный корень, т. е. выражение формы (3), которое, будучи возведено во всевозможные степени, даст все корни сравнения

$$x^{7^3 - 1} = 1, \text{ т. е. } x^{2^1 \cdot 3^2 \cdot 19} = 1 \pmod 7,$$

а для этого нам достаточно иметь первообразные корни каждого из сравнений

$$x^2 = 1, \quad x^{3^2} = 1, \quad x^{19} = 1.$$

Первообразный корень первого есть —1; первообразные корни для $x^{3^2} = 1$ даются уравнениями

$$x^3 = 2, \quad x^3 = 4,$$

так что i есть один из первообразных корней для $x^{3^2} = 1$.

Остается только найти один корень уравнения $x^{19} - 1 = 0$ или лучше

$$\frac{x^{19} - 1}{x - 1} = 0;$$

для этого попробуем, нельзя ли удовлетворить требованию, полагая просто $x = a + a_1 i$ вместо $a + a_1 i + a_2 i^2$; мы должны иметь

$$(a + a_1 i)^{19} = 1,$$

каковое уравнение после разложения по формуле Ньютона и понижения степеней a, a_1 и i, в силу формул

$$a^{m(p-1)} = 1, \quad a_1^{m\,(p-1)} = 1, \quad i^3 = 2,$$

приводится к

$$3\,[a - a^4 a_1^3 + (a^5 a_1^2 + a^2 a_1^5)\, i^2] = 1,$$

откуда, разделяя, получим

$$3a - 3a^4 a_1^3 = 1, \quad a^5 a_1^2 + a^2 a_1^5 = 0.$$

Эти два последние уравнения удовлетворяются, если положить $a = -1$, $a_1 = 1$. Таким образом $-1 + i$ есть первообразный корень для $x^{19} = 1$. Мы нашли выше для первообразных корней $x^2 = 1$ и $x^{3^2} = 1$ значения —1 и i; остается только перемножить три количества

$$-1, \quad i, \quad -1 + i$$

и произведение $i - i^2$ будет первообразным корнем сравнения

$$x^{7^3 - 1} = 1.$$

Итак, здесь выражение $i - i^2$ обладает тем свойством, что, возвышая его во всевозможные степени, мы получим $7^3 - 1$ различных выражений формы

$$a + a_1 i + a_2 i^2.$$

Если мы хотим иметь сравнение наименьшей степени, от которого зависит наш первообразный корень, то нужно исключить i из двух уравнений

$$i^3 = 2, \quad a = i - i^2.$$

Мы, таким образом, получим

$$a^3 - a + 2 = 0.$$

Удобнее взять за основную мнимую единицу, и обозначить через i, корень этого уравнения, так что

$$i^3 - i + 2 = 0, \qquad (i)$$

и мы получим все мнимые числа формы

$$a + a_1 i + a_2 i^2,$$

если будем возвышать i во всевозможные степени и приводить с помощью уравнения (i).

Главное преимущество новой теории, которую мы только что изложили, состоит в доказательстве и для сравнений свойства (столь полезного в обычных уравнениях) допускать в точности столько корней, сколько содержится в порядке их степени.

Метод получения всех корней сравнения очень прост. Сперва нужно подготовить данное сравнение таким образом, чтобы оно не имело равных корней или, другими словами, не имело общих множителей с $F'x = 0$, и способ сделать это, очевидно, тот же, что и для обыкновенных уравнений.

Затем, чтобы получить целые решения, достаточно, как, кажется, первый заметил Либри (Libri), искать общий наибольший множитель $Fx = 0$ и $x^{p-1} = 1$.

Если теперь хотят найти мнимые решения второй степени, то ищут общий наибольший множитель $Fx = 0$ и $x^{p^2-1} = 1$, и вообще решения порядка ν даются общим наибольшим делителем $Fx = 0$ и $x^{p^\nu - 1} = 1$.

Рассмотрение мнимых корней сравнений оказывается особенно необходимым в теории перестановок, где беспрестанно нужно варьировать форму индексов. Оно дает простой и легкий способ узнавать, в каких случаях примитивное уравнение разрешается в радикалах, как я сейчас попытаюсь это показать, дав в двух словах идею.

Пусть $fx = 0$ — алгебраическое уравнение степени p^ν; предположим, что p^ν его корней обозначены через x_k, где индексу k дается p^ν значений, определяемых сравнением $k^{p^\nu} = k \pmod p$.

Возьмем какую-нибудь рациональную функцию V от p^ν корней x_k. Преобразуем эту функцию, подставляя везде вместо индекса k индекс $(ak + b)^{p^r}$, где a, b, r — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям $a^{p^\nu - 1} = 1$, $b^{p^\nu} = b \pmod p$ и r — целое число.

Давая постоянным a, b, r все значения, которые они способны принимать, получим всего $p^\nu(p^\nu - 1)\nu$ способов перестановки корней между собой, с помощью подстановок вида $[x_k, x_{(ak+b)^{p^r}}]$, и функция V принимает при этих подстановках $p^\nu(p^\nu - 1)\nu$ различных форм.

Допустим теперь, что предложенное уравнение таково, что всякая функция корней, не изменяющаяся при $p^\nu(p^\nu - 1)\nu$ перестановках, которые мы построили, имеет в силу этого численное рациональное значение.

Заметим, что при этих обстоятельствах уравнение будет разрешимо в радикалах; чтобы прийти к этому следствию, достаточно обратить внимание на то, что значение, подставляемое вместо k при каждом индексе, может быть представлено в трех формах:

$$(ak + b)^{p^r} = [a(k + b')]^{p^r} =$$

$$= a'k^{p^r} + b'' = a'(k + b')^{p^r}.$$

Лица, опытные в выкладках, употребляющихся в теории уравнений, убедятся в этом без труда.

Это замечание имело бы мало значения, если бы я не умел доказать, что, обратно, примитивное уравнение не может быть разрешимо в радикалах, не удовлетворяя условиям, которые я сейчас укажу. (Я исключаю уравнения девятой и двадцать пятой степеней [7].)

Таким образом для каждого числа вида p^ν можно построить такую группу перестановок, что всякая функция от корней, инвариантная относительно этих перестановок, должна принимать рациональное значение, когда уравнение степени p^ν будет примитивным и разрешимым в радикалах. Впрочем, не существует уравнений такой степени p^ν, которые бы не были сразу и примитивными и разрешимыми в радикалах.

Общая теорема, которую я изложил точнее и в которой развил условия, дана мной в Bulletin за апрель. Она указывает способ построения функции от корней, значение которой будет рационально во всех случаях, когда примитивное уравнение степени p^ν разрешается в радикалах, и приводит, следовательно, к признакам разрешимости этого уравнения путем выкладок, если и не удобных практически, то по крайней мере возможных в теории.

Заметим, что в случае $\nu = 1$ различные значения k представляют не что иное, как последовательность целых чисел. Число подстановок вида (x_k, x_{ak+b}) будет $p(p-1)$.

Функция, которая в случае разрешимых в радикалах уравнений должна иметь рациональное значение, зависит вообще говоря от уравнения степени $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-2)$, к которому, следовательно, нужно применить метод [нахождения] рациональных корней [8].

ПОСМЕРТНЫЕ РАБОТЫ ГАЛУА

ПИСЬМО ОГЮСТУ ШЕВАЛЬЕ [1])

Мой дорогой друг,

Я сделал в анализе несколько новых открытий. Одни из них касаются теории уравнений; другие — интегральных функций.

В теории уравнений я исследовал, в каких случаях уравнения решаются в радикалах, что мне дало повод углубить эту теорию и описать все преобразования над уравнением, допустимые даже когда оно не решается в радикалах.

Из всего этого можно сделать три мемуара.

Первый написан и, вопреки тому, что о нем говорит Пуассон, я его поддерживаю с поправками, которые я в нем сделал.

---

[1]) Написанное накануне смерти автора. (Напечатано в 1832 г. в Revue encyclopédique, сентябрьский номер, стр. 568.) (Лиувилль.)

Второй содержит довольно любопытные приложения теории уравнений. Вот резюме наиболее важных положений:

1. Из предложений II и III первого мемуара видно большое различие между присоединением к уравнению одного из корней некоторого вспомогательного уравнения и присоединением всех корней.

В обоих случаях группа уравнения при присоединении разделяется на такие группы, что от одной группы переходят к другой посредством одной и той же подстановки; но условие, что эти группы содержат одни и те же подстановки, имеет наверное место только во втором случае. Это называется *собственным разложением.*

Другими словами, когда группа G содержит другую группу H, то группа G может разлагаться на группы, каждая из которых получается применением к перестановкам H одной и той же подстановки, таким образом, что

$$G = H + HS + HS' + \dots$$

Она может быть разложена также на группы, которые содержат все одни и те же подстановки, таким образом, что

$$G = H + TH + T'H + \dots$$

Эти два рода разложения обычно не совпадают. Когда они совпадают, то говорят, что разложение *собственное* [9].

Легко видеть, что когда группа уравнения не допускает никакого собственного разложения, то, как бы ни преобразовывать это уравнение, группы преобразованных уравнений имеют всегда одно и то же число перестановок.

Наоборот, когда группа уравнения допускает какое-нибудь собственное разложение такого рода, что она разлагается на M групп по N перестановок, то можно решить данное уравнение с помощью двух уравнений: одно будет иметь группу из M перестановок, другое — из N перестановок.

Стало быть, когда в группе некоторого уравнения исчерпаются все возможные собственные разложения, мы придем к группам, которые можно преобразовать, но перестановки которых остаются всегда в одном и том же числе [10].

Если каждая из этих групп содержит простое число перестановок, то уравнение решается в радикалах; в противном случае — нет [11].

Наименьшее число перестановок, которое может иметь неразложимая группа, когда это число составное, это $5 \cdot 4 \cdot 3$ [12].

2. Наиболее простые разложения это те, которые имеют место в методе Гаусса.

Так как эти разложения очевидны даже в случае конкретной группы уравнения, то бесполезно долго останавливаться на этом предмете [13].

Какие разложения применимы к уравнению, которое не упрощается методом Гаусса?

Я назвал *примитивными* уравнения, которые не могут быть упрощены методом Гаусса; это отнюдь не означает, что эти уравнения действительно неразложимы, так как они могут даже решаться в радикалах.

Как лемму к теории примитивных уравнений, разрешаемых в радикалах, я поместил в июне 1830 г. в Bulletin de Férussac анализ мнимостей теории чисел.

Здесь найдут приложенным [1]) доказательство следующих теорем:

1. Для того чтобы примитивное уравнение разрешалось в радикалах, оно должно быть степени p^ν, где p — простое число.

2. Все перестановки подобного уравнения имеют форму

$$x_{k,l,m,\ldots} \mid x_{ak+bl+cm+\ldots+h,\ a'k+b'l+c'm+\ldots+h',\ a''k+\ldots,\ \ldots,}$$

где ν индексов $k, l, m, \ldots$ указывают все корни, когда каждый из этих индексов пробегает p значений. Индексы берутся по модулю p, т. е. корень остается тем же самым, когда к одному из индексов прибавляют кратность p.

Группа, которая получается, если производить все подстановки этой линейной формы, содержит всего

$$p^\nu (p^\nu - 1)(p^\nu - p)\ldots(p^\nu - p^{\nu-1}) \text{ перестановок.}$$

[1]) Галуа говорит о рукописях, до сих пор неизданных, которые мы опубликуем. (Лиувилль.)

Уравнения, которые удовлетворяют этому общему признаку, должны решаться в радикалах [14].

Условие, которое я указал в Bulletin de Férussac для разрешимости уравнения в радикалах, слишком узко; исключений немного, но они имеются.

Последнее приложение теории уравнений относится к модулярным уравнениям эллиптических функций.

Известно, что группа уравнения, имеющего корнями синусы амплитуды (p^2-1)-го деления периода, такова:

$$x_{k,\,l},\quad x_{ak+bl,\,ck+dl}.$$

Следовательно, соответствующее модулярное уравнение имеет группой

$$x_{\frac{k}{t}},\quad x_{\frac{ak+bl}{ck+dl}},$$

в которой $\frac{k}{l}$ может принимать $p+1$ значений

$$\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1.$$

Итак, условившись, что k может быть бесконечным, можно просто написать

$$x_k,\quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}}.$$

Давая $a,\ b,\ c,\ d$ все значения, получим

$$(p+1)\,p\,(p-1)$$ перестановок.

Но эта группа разлагается *собственным образом* [15] на две группы, подстановки которых суть

$$x_k,\quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}},$$

где $ad-bc$ — квадратичный вычет p [16].

Упрощенная таким образом группа состоит из

$$(p+1)\,p\,\frac{p-1}{2}$$ перестановок.

Но легко видеть, что она не разложима больше собственным образом, если только $p \neq 2$ или $p \neq 3$ [17]. Итак, каким бы образом мы ни преобразовывали уравнение, его группа всегда имеет одно и то же число перестановок.

Но любопытно знать, может ли быть понижена степень.

Прежде всего она не может быть понижена ниже p, так как уравнение степени, меньшей p, не может иметь p множителем числа перестановок своей группы.

Итак, посмотрим, может ли быть понижено до степени p уравнение степени $p+1$, корни которого x_k указываются, если давать k все значения, включая и бесконечность, и группа которого имеет подстановками

$$x_k,\quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}},$$

где $ad-bc$ — некоторый квадрат.

Для этого нужно, чтобы группа разлагалась (разумеется, несобственно) на p групп по $(p+1)\frac{p-1}{2}$ перестановок каждая [18].

Пусть 0 и ∞ — две буквы, соединенные в одной из этих групп. Подстановки, которые не смещают 0 и ∞, будут формы

$$x_k, \quad x_{m^2k}.$$

Следовательно, если M соединено с 1, то буквой, соединенной с m^2, будет m^2M. Следовательно, когда M — квадрат, то будем иметь $M^2 = 1$. Но это упрощение может иметь место только для $p = 5$.

Для $p = 7$ находим группу из $(p+1)\frac{p-1}{2}$ перестановок, в которой

$$\infty, \ 1, \ 2, \ 4$$

имеют соответственно соединенными буквами

$$0, \ 3, \ 6, \ 5.$$

Подстановки этой группы имеют форму

$$x_k, \ x_{a\frac{k-b}{k-c}},$$

где b — буква, соединенная с c, и a — буква, являющаяся вычетом или невычетом одновременно с c.

Для $p = 11$ в тех же обозначениях имеют место те же самые подстановки, причем

$$\infty, \ 1, \ 3, \ 5, \ 5', \ 9$$

имеют соответственно соединенными

$$0, \ 2, \ 6, \ 8, \ 10, \ 7.$$

Таким образом в случае $p = 5, \ 7, \ 11$ модулярное уравнение понижается до степени p.

Можно показать со всей строгостью, что это уравнение невозможно в более высоких случаях [19].

Третий мемуар касается интегралов [20].

Известно, что сумма членов одной и той же эллиптической функции всегда сводится к только одному члену плюс алгебраические и логарифмические количества [21].

Нет других функций, для которых имело бы место это свойство.

Но у всех интегралов от алгебраических функций это свойство заменяется абсолютно подобным.

Рассмотрим сразу все интегралы, дифференциал которых есть функция от переменной и одной и той же иррациональной функции от этой переменной, будет ли или не будет эта иррациональность некоторым радикалом, и выражается или не выражается она в радикалах.

Находим, что число различных периодов наиболее общего интеграла относительно данной иррациональности есть всегда число четное [22].

Пусть $2n$ — это число; имеем следующую теорему:

Любая сумма членов сводится к n членам плюс алгебраические и логарифмические количества [23].

Функции первого рода суть те, у которых алгебраическая и логарифмическая части равны нулю.

Их имеется n различных [23].

Функции второго рода суть те, у которых дополнительная часть чисто алгебраическая.

Их имеется n различных [24].

Можно предположить, что диференциалы других функций обращаются в бесконечность только один раз для $x = a$ и, более того, что их дополнительная часть сводится к одному единственному логарифму $\log P$, где P — некоторое алгебраическое количество. Обозначая через $\Pi(x, a)$ эти функции, будем иметь теорему:

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = \sum \varphi a \cdot \psi x,$$

где φa и ψx — функции первого и второго рода [25].

Обозначая через $\Pi(a)$ и ψ периоды $\Pi(x, a)$ и ψx относительно одного и того же обхода x, выводим

$$\Pi(a) = \sum \psi \cdot \varphi a.$$

Таким образом периоды функций третьего рода всегда выражаются в функциях первого и второго рода [26].

Можно также вывести теоремы, аналогичные теореме Лежандра [27]:

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2}.$$

Приведение функций третьего рода к определенным интегралам, что является самым прекрасным открытием Якоби, неосуществимо кроме случая эллиптических функций [28].

Умножение интегральных функций на целое число, как и сложение, всегда возможно посредством одного

уравнения степени n, корни которого суть значения, подставляемые в интеграл для получения приведенных членов [29].

Уравнение, дающее деление периода на p равных частей, имеет степень $p^{2n} - 1$. Его группа имеет всего $(p^{2n} - 1)(p^{2n} - p) \dots (p^{2n} - p^{2n-1})$ перестановок [30].

Уравнение, дающее деление суммы n членов на p равных частей, имеет степень p^{2n}. Оно разрешимо в радикалах [31].

О преобразовании. — Прежде всего можно, следуя аргументации, аналогичной приводимой Абелем в его последнем мемуаре, доказать, что если в одном соотношении между двумя интегралами имеются две функции

$$\int \Phi(x, X)\, dx, \quad \int \Psi(y, Y)\, dy,$$

причем последний интеграл имеет $2n$ периодов, то можно будет предположить, что y и Y выражаются посредством одного единственного уравнения степени n в функции от x и X.

В силу этого можно предположить, что преобразование постоянно имеет место только между двумя интегралами, так как, очевидно, имеем, беря какую-нибудь рациональную функцию от y и Y, $\sum \int f(y, Y)\, dy = \int F(x, X)\, dx +$ некоторые алгебраические и логарифмические количества.

В случае, когда интегралы в первом и втором членах не имеют оба одного и того же числа перио-

дов, имеются очевидные приведения этого уравнения.

Таким образом мы можем сравнивать только интегралы, имеющие оба одно и то же число периодов [32].

Можно доказать, что наименьшая степень иррациональности у двух подобных интегралов не может быть для одного больше, чем для другого [33].

Затем очевидно, что всегда можно преобразовать данный интеграл в другой, у которого один период первого интеграла разделен на простое число p, а $2n-1$ других остаются теми же самыми [34].

Следовательно, остается сравнивать только такие интегралы, у которых одни и те же периоды, и, следовательно, такие, что n членов одного выражаются посредством одного единственного уравнения степени n от членов другого интеграла, и обратно. Здесь мы ничего не знаем [35].

Ты знаешь, мой дорогой Огюст, что это не были единственные вопросы, которые я исследовал. Мои главные размышления уже несколько времени были направлены к приложению к трансцендентному анализу теории неопределенности (l'ambiguïté). Речь идет о том, чтобы видеть a priori, какие замены можно произвести, какие количества можно подставить вместо данных количеств в соотношение между трансцендентными количествами или функциями так, чтобы соотношение не перестало иметь место [36]. Но я не имею времени, и мои идеи еще недостаточно хорошо развиты в этой необъятной области.

Ты дашь напечатать это письмо в Revue encyclopédique.

Я в своей жизни часто позволял себе высказывать предложения, в которых не был уверен, но все, что я написал здесь, уже около года в моей голове, и слишком в моих интересах не ошибиться, чтобы меня могли заподозрить в том, что я объявляю теоремы, для которых не имел бы полного доказательства.

Ты публично попросишь Якоби или Гаусса [37] дать их заключение, не о справедливости, но о важности этих теорем.

После этого будут, я надеюсь, люди, которые найдут свою выгоду в расшифровке всей этой путаницы.

Горячо обнимаю тебя.

Э. Галуа.

29 мая 1832 г.

МЕМУАР ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ[1])

Мемуар, здесь приложенный[2]), есть извлечение из одной работы, которую я имел честь представить в Академию год тому назад. Эта работа не была

---

[1]) Этот и следующий мемуары были найдены в бумагах Галуа и опубликованы впервые в 1846 г. Лиувиллем, который предпослал им следующее примечание:

„Включив в свой сборник письмо Галуа к Огюсту Шевалье, издатели Revue encyclopédique объявили, что они в скором времени опубликуют рукописи, оставленные Галуа. Но это обещание не было сдержано. Огюст Шевалье, однако, приготовил работу. Он ее передал нам, так что на нижеследующих листах найдут:

1. Целиком один мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах с приложением к уравнениям простой степени.

2. Один отрывок из второго мемуара, в котором Галуа изучает уравнения, которые он называет *примитивными*.

Мы сохранили бо́льшую часть примечаний, которые Огюст Шевалье прибавил к мемуарам, о которых мы только

понята, а предложения, которые она заключает, были подвергнуты сомнению [38]. Я должен был удовольствоваться дачей в синтетической форме общих принципов и одного единственного приложения моей теории. Я умоляю моих судей по крайней мере прочитать со вниманием эти немногие страницы.

Здесь найдут общее *условие*, которому *удовлетворяют все уравнения, разрешимые в радикалах*, и которое, обратно, дает уверенность в их разрешимости. Сделано приложение только к уравнениям, степень которых есть простое число. Вот теорема, данная нашим анализом:

Для того чтобы уравнение простой степени, не имеющее соизмеримых делителей, разрешалось в радикалах, необходимо и достаточно, чтобы все его корни были рациональными функциями от каких-нибудь двух из них.

что говорили. Все эти примечания помечены инициалами О. Ш. Необозначенные примечания принадлежат самому Галуа.

Мы дополняем эту публикацию несколькими другими отрывками, извлеченными из бумаг Галуа, которые, не имея большого значения, могут быть, однако, с интересом прочтены геометрами“.

Извлечения, о которых говорит Лиувилль в последней фразе этого примечания, никогда не были опубликованы.

[2]) Я нашел удобным поместить перед началом мемуара предисловие, которое стоит прочитать, хотя оно и было зачеркнуто в рукописи. (*О. Ш.*)

Другие приложения теории суть сами по себе скорее частные теории. Они, с другой стороны, требуют применения теории чисел и одного своеобразного алгоритма: мы их отложим до другого подходящего случая. Относительно модулярных уравнений теории эллиптических функций мы докажем, что они не могут решаться в радикалах.

16 января 1831 г. *Э. Галуа.*

ПРИНЦИПЫ

Я начну с изложения нескольких определений и последовательности лемм, которые все известны.

Определения. Уравнение называется *приводимым*, когда оно допускает рациональные делители; *неприводимым* — в противном случае.

Здесь нужно объяснить, что должно понимать под словом *рациональный*, так как оно будет часто попадаться.

Когда у уравнения *все* коэфициенты численные и рациональные, то это [т. е. наличие рационального делителя] означает просто, что уравнение можно разложить на множители, которые имеют численные и рациональные коэфициенты.

Но, когда *не все* коэфициенты уравнения будут численными и рациональными, тогда надо понимать под рациональным делителем делитель, коэфициенты которого выражаются в рациональных функциях от коэфициентов рассматриваемого уравнения.

Более того, можно условиться рассматривать как рациональности все рациональные функции от некоторого числа определенных количеств, предположенных a priori известными [39]. Например, можно выбрать некоторый корень из целого числа и рассматривать как рациональности все рациональные функции от этого радикала.

Тогда, когда мы уславливаемся рассматривать как известные некоторые количества, мы говорим, что мы их *присоединяем* к уравнению, о решении которого идет речь. Мы говорим, что эти количества *присоединены* к уравнению.

Положив это, мы будем называть *рациональным* всякое количество, которое будет выражаться рациональной функцией от коэфициентов уравнения и некоторого числа произвольно выбранных *присоединенных количеств* [40].

Когда мы будем пользоваться вспомогательными уравнениями, они будут рациональными, если их коэфициенты рациональны в нашем смысле.

Мы увидим, сверх того, что свойства и трудности уравнения могут быть сделаны совершенно разными сообразно количествам, которые к нему присоединены. Например присоединение некоторого количества может сделать приводимым неприводимое уравнение. Так, когда присоединяют к уравнению

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0,$$

где n — простое число, корень одного из вспомога-

тельных уравнений Гаусса [41], то это уравнение разлагается на множители и становится, следовательно, приводимым.

Подстановками называются переходы от одной перестановки к другой.

Перестановка, от которой отправляются для обозначения подстановки, совершенно произвольна, когда дело касается функций, так как нет никакого повода для того, чтобы в функции от многих букв одна буква занимала преимущественное положение перед другой.

Так как, однако, едва ли может быть развита идея подстановки без сформирования идеи перестановки, то мы часто будем употреблять в речи слово перестановка, и мы будем рассматривать подстановки только как переход от одной перестановки к другой.

Когда мы захотим группировать подстановки, мы их будем все производить над одной и той же перестановкой.

Так как всегда рассматриваются вопросы, в которых первоначально расположение букв совершенно не влияет на группы, которые мы будем рассматривать, то мы должны будем иметь одни и те же подстановки, какова бы ни была перестановка, от которой мы будем отправляться. Итак, если в подобной группе имеются подстановки S и T, то есть уверенность в наличии подстановки ST.

Таковы определения, которые мы сочли нужным напомнить.

Лемма I. *Неприводимое уравнение не может иметь ни одного общего корня с рациональным уравнением, не деля его.*

Действительно, общий наибольший делитель неприводимого уравнения и другого уравнения будет тоже рациональным; следовательно, и т. д.

Лемма II. *Пусть дано какое-нибудь уравнение, не имеющее равных корней, и пусть корни его суть* $a, b, c, \ldots$; *всегда можно образовать такую функцию* V *от корней, что ни одно из значений этой функции, которые получатся, если переставлять всеми способами ее корни, не будет равно другому.*

Например, можно взять

$$V = Aa + Bb + Cc + \ldots,$$

где A, B, C — соответственно выбранные целые числа.

Лемма III. *Функция* V, *выбранная, как указано в предыдущем пункте, обладает тем свойством, что все корни рассматриваемого уравнения рационально выражаются в функции от* V.

Действительно, пусть

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots)$$

или

$$V - \varphi(a, b, c, d, \ldots) = 0.$$

Перемножим между собой все подобные уравнения, которые получаются, если переставлять все буквы,

оставляя только первую фиксированной; получится следующее выражение:

$$[V - \varphi(a, b, c, d, \ldots)]\,[V - \varphi(a, c, b, d, \ldots)] \times \\ \times [V - \varphi(a, b, d, c, \ldots)] \ldots,$$

симметричное относительно $b, c, d, \ldots$, которое, следовательно, можно написать в виде функции от a. Мы получим, таким образом, уравнение вида

$$F(V, a) = 0.$$

И я утверждаю, что отсюда можно получить значение a. Для этого достаточно найти общее решение этого уравнения с заданным. Это решение будет единственным общим, так как не может быть, например,

$$F(V, b) = 0,$$

Ибо тогда это уравнение имело бы общий множитель с подобным ему уравнением без того, чтобы одна из функций $\varphi(a, \ldots)$ была равна одной из функций $\varphi(b, \ldots)$, но это противоречит предположению. Отсюда следует, что a выражается в виде рациональной функции от V, и то же самое для других корней [1].

[1]) Замечательно, что из этого предложения можно заключить, что всякое уравнение зависит от такого вспомогательного уравнения, что все корни этого нового уравнения являются рациональными функциями друг друга; ибо таково вспомогательное уравнение для V. Впрочем, это замечание имеет лишь интерес курьеза. Действительно, уравнение, обладающее этим последним свойством, вообще легче решить, чем какое-нибудь другое [42].

Это предложение упоминается без доказательства Абелем в его посмертной работе по эллиптическим функциям.

Лемма IV. *Предположим, что образовано уравнение относительно V и что взят один из его неприводимых множителей, так что V является корнем неприводимого уравнения. Пусть V, V', V'', ... суть корни этого неприводимого уравнения. Если $a = f(V)$ есть один из корней заданного уравнения, то $f(V')$ тоже будет корнем этого уравнения.*

Действительно, перемножая между собой все множители вида $V - \varphi(a, b, c, \ldots, d)$, где над буквами будут произведены все возможные перестановки, будем иметь рациональное уравнение относительно V, которое окажется непременно делящимся на рассматриваемое уравнение; следовательно, V' должно получиться при перемене букв в функции V. Пусть $F(V, a) = 0$ — уравнение, которое получается, если переставлять все буквы, кроме первой. Будем иметь тогда $F(V', b) = 0$, где b может быть и равно a, но во всяком случае является корнем заданного уравнения; следовательно, так же, как из заданного уравнения и из $F(V, a) = 0$ вытекает $a = f(V)$, из заданного уравнения и из $F(V', b) = 0$ вытекает $b = f(V')$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I

Теорема. *Пусть дано уравнение и $a, b, c, \ldots$ суть m его корней. Существует всегда группа пере-*

становок [43] *букв* $a, b, c, \ldots$, *обладающая следующими свойствами:*

1. *Всякая функция от корней, инвариантная*[1]) *относительно подстановок этой группы, рационально известна.*

2. *Обратно, всякая рационально определяемая функция от корней инвариантна относительно этих подстановок* [44].

(В случае алгебраического уравнения [45], эта группа есть не что иное, как совокупность $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ возможных перестановок над m буквами, так как в этом случае симметрические функции суть единственные рационально определенные.)

(В случае уравнения $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, если предположить $a = r$, $b = r^g$, $c = r^{g^2}, \ldots$, где g — некоторый первообразный корень, группа перестановок будет просто такой:

$$\begin{array}{l} abcd \ldots k \\ bcd \ldots ka \\ cd \ldots kab \\ \ldots\ldots \\ kabc \ldots i; \end{array}$$

[1]) Мы называем здесь инвариантной не только такую функцию, форма которой остается неизменной при подстановках корней между собой, но еще и такую, численное значение которой не меняется при этих подстановках. Например, если $Fx = 0$ — уравнение, то Fx — функция от корней, которая не меняется при какой бы то ни было перестановке. Когда мы говорим, что функция рационально известна, мы хотим сказать, что ее численное значение выражается рациональной функцией от коэфициентов уравнения и присоединенных количеств.

в этом частном случае число перестановок равно степени уравнения, и это же свойство будет иметь место для уравнений, все корни которых суть рациональные функции друг от друга [46]).

Доказательство. Каково бы ни было данное уравнение, можно найти такую рациональную функцию V от корней, что все корни будут рациональными функциями от V. Положив это, рассмотрим неприводимое уравнение, корнем которого является V (леммы III и IV). Пусть $V, V', V'', \ldots, V^{(n-1)}$ будут корни этого уравнения.

Пусть $\varphi V, \varphi_1 V, \varphi_2 V, \ldots, \varphi_{m-1} V$ будут корни заданного уравнения.

Напишем n следующих перестановок корней:

$$\begin{array}{lllll} (V) & \varphi V, & \varphi_1 V, & \varphi_2 V, & \ldots, \varphi_{m-1} V, \\ (V') & \varphi V', & \varphi_1 V', & \varphi_2 V', & \ldots, \varphi_{m-1} V', \\ (V'') & \varphi V'', & \varphi_1 V'', & \varphi_2 V'', & \ldots, \varphi_{m-1} V'', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (V^{(n-1)}) & \varphi V^{(n-1)}, & \varphi_1 V^{(n-1)}, & \varphi_2 V^{(n-1)}, & \ldots, \varphi_{m-1} V^{(n-1)}; \end{array}$$

я утверждаю, что эта группа перестановок обладает изложенными свойствами.

Действительно:

1. Всякая функция корней F, инвариантная относительно подстановок этой группы, может быть написана так: $F = \psi V$, и мы будем иметь:

$$\psi V = \psi V' = \psi V'' = \ldots = \psi V^{(n-1)}.$$

Значение F можно, следовательно, определить рационально [47].

2. Обратно, если функция F рационально определена, то, положив $F = \psi V$, мы должны будем иметь:

$$\psi V = \psi V' = \psi V'' = \ldots = \psi V^{(n-1)},$$

так как уравнение относительно V не имеет соизмеримых делителей, а V удовлетворяет уравнению $F = \psi V$ [48], где F — рациональное количество.

Стало быть, функция F будет непременно инвариантной относительно подстановок написанной выше группы.

Таким образом эта группа обладает двойным свойством, о котором шла речь в предложенной теореме. Теорема, следовательно, доказана.

Мы будем называть рассмотренную группу *группой уравнения*.

Схолия I. Очевидно, что в группе перестановок, о которой здесь шла речь, предметом рассмотрения является не расположение букв, а только подстановки, при помощи которых переходят от одной перестановки к другой.

Таким образом можно произвольно задать первую перестановку, лишь бы другие перестановки всегда выводились одними и теми же подстановками букв. Новая группа, образованная таким образом, очевидно, обладает теми же свойствами, что и первая, так как в предыдущей теореме речь идет только о подстановках, которые можно производить в функциях [49].

Схолия II. Подстановки не зависят даже от числа корней [50].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II

Теорема [1]). *Если к данному уравнению присоединить корень r неприводимого вспомогательного уравнения, то* 1) *произойдет одно из двух: или группа уравнения не изменится, или она распадется на p групп, соответственно принадлежащих заданному уравнению, когда к нему присоединяют каждый из корней вспомогательного уравнения*; 2) *эти группы обладают тем замечательным свойством, что от одной группы переходят к другой, производя во всех перестановках первой одну и ту же подстановку букв.*

1. Если, после присоединения r, уравнение относительно V, которое рассматривалось выше, остается неприводимым, то ясно, что группа уравнения не изменяется. Напротив, если уравнение становится

---

[1]) В формулировке этой теоремы после слов: *корень r неприводимого вспомогательного уравнения,* Галуа сначала поместил слова: *простой степени p*, которые он тоже вычеркнул. Также в доказательстве, вместо: *где r, r', r'', ... будут другие значения r*, первоначальная редакция гласила: *где r, r', r'', ... — различные значения r.*

Наконец, на полях рукописи находим следующее примечание автора:

„Нужно несколько дополнить доказательство. Я не имею времени“. Эта строка набросана с большой поспешностью на бумаге; это обстоятельство, подкрепляемое словами „Я не имею времени“, заставляет меня думать, что Галуа перечитывал для исправления мемуар перед тем, как пойти на дуэль. (*О. Ш.*).

приводимым, то оно разлагается на p множителей, все одной и той же степени и вида

$$f(V, r) \times f(V, r') \times f(V, r'') \times \ldots,$$

где r, r', r'',... будут другие значения r. Таким образом группа заданного уравнения разлагается на группы, каждая с одним и тем же числом перестановок, так как каждому значению V соответствует одна перестановка. Эти группы будут соответственно группами заданного уравнения, когда к нему по очереди присоединят r, r', r'', ... [51].

2. Мы видели выше, что все значения V являются рациональными функциями друг от друга. В силу этого предположим, что V является одним корнем $f(V, r) = 0$, $F(V)$ пусть будет другим; ясно, что если V' есть корень $f(V, r') = 0$, то точно так же $F(V')$ будет другим корнем; действительно, мы имеем:

$$f[F(V), r] = \text{функции, делящейся на } f(V, r).$$

Следовательно (лемма I),

$$f[F(V'), r'] = \text{функции, делящейся на } f(V', r').$$

Положив это, я утверждаю, что мы получим группу относительно r', произведя везде в группе относительно r одну и ту же подстановку букв.

Действительно, если, например, мы имеем

$$\varphi_\mu F(V) = \varphi_\nu (V),$$

то будем иметь также (лемма I):

$$\varphi_\mu F(V') = \varphi_\nu (V').$$

Следовательно, для того чтобы перейти от перестановки $[F(V)]$ к перестановке $[F(V')]$, нужно сделать ту же подстановку, что и для перехода от перестановки (V) к перестановке (V').

Теорема, следовательно, доказана [52].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III

Теорема. *Если к уравнению присоединить все корни вспомогательного уравнения, то группы, рассмотренные в теореме II, обладают сверх того еще тем свойством, что подстановки будут одни и те же в каждой группе.*

Доказательство имеется [1]) [53].

---

[1]) В рукописи эта теорема находится на полях взамен другой, которую Галуа также озаглавил: *Предложение III.*

Вот первоначальный текст: Теорема. *Если уравнение относительно r имеет вид $r^p = A$ и если p-е корни из единицы находятся в числе ранее присоединенных количеств, то p рассмотренных в теореме II групп обладают, сверх того, тем свойством, что подстановки букв, при которых переходят от одной перестановки к другой в каждой группе, одни и те же для всех групп.* Действительно, в этом случае присоединение к уравнению того или другого значения r приводит к тому же. Следовательно, его свойства должны быть теми же самыми после присоединения того или другого значения. Таким образом его группа должна быть одной и той же в подстановках (предложение I, схолия). Следовательно, и т. д.

Все это тщательно зачеркнуто; новая формулировка имеет дату 1832 г. и показывает, судя по манере, которой она написана, что автор крайне спешил, что подтверждает утверждение, которое я сделал в предыдущей сноске. (*О. Ш.*)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV

Теорема. *Если к уравнению присоединить числовое значение некоторой функции от его корней, то группа уравнения понижается таким образом, что она не содержит других перестановок кроме тех, для которых функция является инвариантной.*

Действительно, в силу предложения I всякая известная функция должна быть инвариантна относительно перестановок группы уравнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ V

Проблема. *В каких случаях уравнение разрешимо в простых радикалах?*

Я замечу прежде всего, что для решения уравнения нужно последовательно понижать его группу, пока она не приведется к одной единственной перестановке. Действительно, когда какое-нибудь уравнение решено, то любая функция от его корней известна, даже когда она не является инвариантной относительно ни одной перестановки.

Положив это, исследуем, каким условиям должна удовлетворять группа уравнения для того, чтобы она могла быть таким образом понижена присоединением радикальных количеств.

Проследим ход возможных операций при таком решении, рассматривая как различные операции извлечения каждого корня простой степени.

Присоединим к уравнению первый радикал, извлеченный при решении. Могут представиться два

случая: или присоединением этого радикала группа перестановок уравнения будет уменьшена, или это извлечение корня является простой подготовкой, группа же остается той же самой.

Всегда после некоторого конечного числа извлечений корней группа должна будет уменьшиться, без чего уравнение не будет разрешимо.

Если, дойдя до этого места, мы будем иметь несколько способов уменьшения группы заданного уравнения простым извлечением корня, то надо, как мы говорили, рассматривать только один радикал возможно меньшей степени из всех таких простых радикалов, знание каждого из которых уменьшает группу уравнения.

Итак, пусть p — простое число, которое представляет эту минимальную степень такого рода, что при извлечении некоторого корня степени p мы уменьшаем группу уравнения.

Мы всегда можем предположить, по крайней мере поскольку дело идет о группе уравнения, что между количествами, уже присоединенными к уравнению, находится p-й корень из единицы, α; в самом деле, так как это выражение получается извлечением корней степени, меньшей p, то знание его ни в чем не меняет группы уравнения.

Следовательно, в силу теорем II и III, группа уравнения должна будет разложиться на p групп, обладающих относительно друг друга таким двойным свойством: 1) от одной группы переходят к другой

одной и той же единственной подстановкой, 2) все группы содержат одни и те же подстановки.

Я утверждаю, что, и обратно, если группа уравнения может разделиться на p групп, которые обладают этим двойным свойством, то можно одним простым извлечением p-го корня и присоединением этого p-го корня свести группу уравнения к одной из ее частичных групп.

Действительно, возьмем некоторую функцию от корней, которая будет инвариантной относительно всех подстановок одной из частичных групп и меняется при всех других подстановках. (Для этого достаточно выбрать симметричную функцию от различных значений, которые принимает при всех перестановках одной из частичных групп какая-нибудь функция, не являющаяся инвариантной ни для одной подстановки.)

Пусть θ — эта функция от корней.

Произведем над функцией θ одну из подстановок полной группы, которая не является общей с частичной группой. Пусть θ_1 — результат. Произведем над функцией θ_1 ту же подстановку, и пусть θ_2 — результат, и т. д.

Так как p — простое число, то эта последовательность может остановиться только на члене θ_{p-1}; следовательно, будем иметь: $\theta_p = \theta$, $\theta_{p+1} = \theta_1$ и т. д.

Но тогда ясно, что функция

$$(\theta + \alpha\theta_1 + \alpha^2\theta_2 + \ldots + \alpha^{p-1}\theta_{p-1})^p$$

будет инвариантной относительно всех перестановок полной группы и, следовательно, действительно будет известной.

Если извлечь p-й корень из этой функции и присоединить его к уравнению, то тогда по предложению IV группа уравнения будет содержать только подстановки частичной группы.

Таким образом для того чтобы группа некоторого уравнения могла быть понижена простым извлечением корня, указанное условие является необходимым и достаточным.

Присоединим к уравнению рассмотренный радикал; мы можем теперь для новой группы провести все те же рассуждения, что и для предыдущей, и она разложится по указанному образцу, и т. д., до некоторой группы, которая будет содержать не более одной единственной перестановки [54].

Схолия. Легко проследить этот ход в известном решении общего уравнения четвертой степени. Действительно, это уравнение решается посредством уравнения третьей степени, которое само требует извлечения квадратного корня. В естественной последовательности идей именно с этого квадратного корня и надо начинать. При присоединении к уравнению четвертой степени этого квадратного корня группа уравнения, которая содержит всего 24 подстановки, разлагается на две, которые содержат по 12. Если обозначить через a, b, c, d корни, то вот одна из этих групп:

abcd, *acdb*, *adbc*,
badc, *cabd*, *dacb*,
cdab, *dbac*, *bcad*,
dcba, *bdca*, *cbda*.

Эта группа теперь сама разлагается на три группы, как указано в теоремах II и III. Итак, после извлечения одного единственного корня третьей степени остается просто группа

abcd,
badc,
cdab,
dcba.

Эта группа вновь разлагается на две группы:

abcd, *cdab*,
badc, *dcba*,

Таким образом после простого извлечения квадратного корня остается

abcd,
badc,

что решается, наконец, простым извлечением квадратного корня.

Мы получили таким образом и решение Декарта и решение Эйлера; хотя при решении вспомогательного уравнения третьей степени последнее дает три квадратных корня, известно, что достаточно двух, так как третий выводится из них рационально.

Мы приложим теперь это условие к неприводимым уравнениям простой степени.

ПРИЛОЖЕНИЕ К НЕПРИВОДИМЫМ УРАВНЕНИЯМ ПРОСТОЙ СТЕПЕНИ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ VI

Лемма. *Неприводимое уравнение простой степени не может стать приводимым при присоединении радикала, показатель которого будет другим, чем степень уравнения* [55].

Действительно, если r, r', r'', ... будут различные значения радикала и $Fx = 0$ — заданное уравнение, то надо было бы, чтобы Fx разлагалось на множители

$$f(x, r) \times f(x, r') \times \ldots,$$

все одной и той же степени, чего не может быть, если только $f(x, r)$ не будет первой степени относительно x.

Таким образом неприводимое уравнение простой степени не может стать приводимым, если только его группа не сводится к одной единственной перестановке.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ VII

Проблема. *Какова группа неприводимого уравнения простой степени n, разрешимого в радикалах?*

Согласно предыдущему предложению наименьшая возможная группа, находящаяся перед той, которая имеет только одну единственную перестановку, содержит n перестановок. Но группа перестановок простого числа n букв не может сводиться к n переста-

новкам, если только одна из этих перестановок не выводится из другой циклической подстановкой порядка n. [См. мемуар Коши в Journal de l'École Polytechnique, XVII тетрадь.] Таким образом предпоследняя группа будет

$$\left.\begin{array}{llllllll} x_0, & x_1, & x_2, & x_3, \ldots, & x_{n-3}, & x_{n-2}, & x_{n-1}, \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \ldots, & x_{n-2}, & x_{n-1}, & x_0, \\ x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \ldots, & x_{n-1}, & x_0, & x_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-1}, & x_0, & x_1, & x_2, \ldots, & x_{n-4}, & x_{n-3}, & x_{n-2}, \end{array}\right\} \quad (G)$$

где $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ — корни.

Но группа, непосредственно предшествующая этой группе в порядке разложений, должна состоять из некоторого числа групп, имеющих все те же подстановки, что и эта группа. Замечу, что эти подстановки могут выражаться так (положим вообще $x_n = x_0$, $x_{n+1} = x_1, \ldots$; ясно, что каждая подстановка группы (G) получается, если всюду вместо x_k поставить x_{k+c}, где c — некоторая постоянная [56]).

Рассмотрим какую-нибудь из групп, подобных группе (G). По теореме II она должна получиться, если произвести везде в этой группе одну и ту же подстановку: например, если всюду в группе (G) вместо x_k поставить $x_{f(k)}$, где f — некоторая функция.

Так как подстановки этих групп должны быть те же самые, что и подстановки группы (G), то мы должны иметь

$$f(k + c) = f(k) + C,$$

где C не зависит от k.

Следовательно,

$$f(k + 2c) = f(k) + 2C,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(k + mc) = f(k) + mC.$$

Если $c = 1$, $k = 0$, то найдем, что

$$f(m) = am + b$$

или

$$f(k) = ak + b,$$

где a и b — постоянные.

Следовательно, группа, непосредственно предшествующая группе (G), должна содержать только подстановки

$$x_k, \quad x_{ak+b},$$

и не содержит, следовательно, других циклических подстановок, кроме подстановок группы (G).

Проведя для этой группы те же рассуждения, что и для предыдущей, мы выведем, что первая в порядке разложения группа, т. е. *действительная группа уравнения*, может содержать только подстановки вида

$$x_k, \quad x_{ak+b}.$$

Итак, *если неприводимое уравнение простой степени решается в радикалах, то группа этого уравнения будет содержать подстановки только вида*

$$x_k, \quad x_{ak+b},$$

где a и b — постоянные.

Обратно, если это условие имеет место, то я утверждаю, что уравнение будет разрешимо в радикалах. Действительно, рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
&(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_{n-1})^n = X_1,\\
&(x_0 + \alpha x_a + \alpha^2 x_{2a} + \ldots + \alpha^{n-1} x_{(n-1)a})^n = X_a,\\
&(x_0 + \alpha x_{a^2} + \alpha^2 x_{2a^2} + \ldots + \alpha^{n-1} x_{(n-1)a^2})^n = X_{a^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

где α есть n-й корень из единицы, a — первообразный корень числа n.

Ясно, что все функции, инвариантные относительно циклических подстановок количеств X_1, X_a, $X_{a^2}, \ldots$, будут в этом случае непосредственно известны. Следовательно, можно найти X_1, X_a, $X_{a^2}, \ldots$ методом Гаусса для двучленных уравнений. Следовательно, и т. д. [57].

Таким образом для того чтобы неприводимое уравнение простой степени разрешалось в радикалах, *необходимо* и *достаточно*, чтобы все функции, инвариантные относительно подстановок

$$x_k, \quad x_{ak+b},$$

были рационально известны.

Таким образом функция

$$(X_1 - X)(X_a - X)(X_{a^2} - X)\ldots$$

должна, каково бы ни было X, быть известной.

Следовательно, *необходимо* и *достаточно*, чтобы уравнение, которое дает эта функция от корней, допускало, каково бы ни было X, рациональное значение [58].

Если все коэфициенты заданного уравнения рациональны, то вспомогательное уравнение, которое дает эта функция, тоже имеет рациональные коэфициенты, и достаточно узнать, имеет ли это вспомогательное уравнение степени $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)$ рациональный корень или нет.

Это способ, который следует употреблять на практике. Но мы представим теорему в другой форме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ VIII

Теорема. *Для того чтобы неприводимое уравнение простой степени разрешалось в радикалах, необходимо и достаточно, чтобы при знании двух каких-нибудь его корней остальные все выводились из них рационально.*

Во-первых, это необходимо, так как из того, что подстановка

$$x_k, \quad x_{ak+b}$$

не оставляет никогда двух букв на своих местах, ясно, что при присоединении двух корней к уравнению его группа должна свестись к одной единственной перестановке.

Во-вторых, это достаточно; в самом деле, в этом случае никакая подстановка группы не оставит двух букв на своих местах. Следовательно, группа содержит самое большее $n(n-1)$ перестановок. Следова-

тельно, она содержит одну единственную циклическую подстановку (иначе она имела бы по крайней мере n^2 перестановок [59]). Итак, все подстановки группы, x_k, x_{fk}, должны удовлетворять условию

$$f(k+c) = f(k) + C.$$

Следовательно, и т. д. [60].

Теорема таким образом доказана.

ПРИМЕР К ТЕОРЕМЕ VII

Пусть $n = 5$; группа будет следующей:

abcde	*aedcb*
bcdea	*edcba*
cdeab	*dcbae*
deabc	*cbaed*
eabcd	*baedc*
acebd	*adbec*
cebda	*dbeca*
ebdac	*becad*
bdace	*ecadb*
daceb	*cadbe*.

ПРИМИТИВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫЕ РАЗРЕШАЮТСЯ В РАДИКАЛАХ [1])

(*Фрагмент*)

Исследуем вообще, в каком случае примитивное уравнение [61] разрешимо в радикалах. Мы сможем установить одно общее основное свойство степени такого уравнения. Это свойство таково: *для того чтобы примитивное уравнение было разрешимо в радикалах, необходимо, чтобы его степень была вида* p^ν, *где* p — *простое число*. И отсюда непосредственно следует, что когда имеется разрешимое в радикалах неприводимое уравнение, степень которого допускает неравные простые множители, то нельзя действовать иначе, как по методу разложения Гаусса; в противном случае уравнение будет неразрешимо.

Чтобы обосновать общее свойство, высказанное нами относительно примитивных уравнений, которые

[1]) См. сноску [1]) на стр. 60.

можно решить в радикалах, мы можем предположить что уравнение, которое мы хотим решить, примитивно, но перестает им быть при присоединении одного простого радикала. Другими словами, мы можем предположить, что группа уравнения разложится на n (n — простое число) неприводимых сопряженных, но не примитивных групп. Ибо, хотя бы степень уравнения была простой, подобная группа всегда встречается в последовательности разложений.

Пусть N — степень уравнения; предположим, что после извлечения корня простой степени n оно становится не примитивным и разделяется на Q примитивных уравнений степени P посредством одного единственного уравнения степени Q.

Обозначим через G группу уравнения; эта группа должна разделиться на n сопряженных не примитивных групп, в которых буквы расположатся в системы, составленные из P соединенных букв каждая [62]. Посмотрим, сколькими способами это может произойти.

Пусть H — одна из сопряженных не примитивных групп. Легко видеть, что в этой группе две каких-нибудь произвольно взятых буквы составляют часть некоторой системы P соединенных букв и являются частью одной действительной системы.

В самом деле, во-первых, если имеются две буквы, которые не могут составлять части одной и той же системы P соединенных букв, то группа G, которая такова, что любая из ее подстановок преобразует одну в другую все подстановки группы H,

будет не примитивной, что противоречит предположению [63].

Во-вторых, если две буквы являются частью нескольких разных систем, то отсюда будет следовать, что группы, соответствующие разным системам P соединенных букв, будут не примитивными, что тоже противно предположению [64].

Имея это в виду, пусть

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{P-1},$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{P-1},$$
$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{P-1}$$

N букв: предположим, что каждая горизонтальная строка представляет систему соединенных букв. Пусть

$$a_0,\ a_{0,1},\ a_{0,2},\ \ldots,\ a_{0,P-1}$$

P соединенных букв, расположенные все в первой вертикальной колонне. (Ясно, что мы можем сделать, чтобы это было так, переставляя горизонтальные строки.)

Пусть также

$$a_{1,0},\ a_{1,1},\ a_{1,2},\ a_{1,3},\ \ldots,\ a_{1,P-1}$$

P соединенных букв, расположенные все во второй вертикальной колонне таким образом, что

$$a_{1,0},\ a_{1,1},\ a_{1,2},\ a_{1,3},\ \ldots,\ a_{1,P-1}$$

принадлежат соответственно тем же самым горизонтальным строкам, что и

$$a_{0,0},\ a_{0,1},\ a_{0,2},\ a_{0,3},\ \ldots,\ a_{0,P-1};$$

пусть так же точно системами соединенных букв являются

$$a_{2,0},\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ a_{2,3},\ \ldots,\ a_{2,\,P-1},$$
$$a_{3,0},\ a_{3,1},\ a_{3,2},\ a_{3,3},\ \ldots,\ a_{3,\,P-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Мы получим таким образом всего P^2 букв. Если полное число букв не исчерпано, возьмем третий индекс такого рода, что

$$a_{m,n,0},\ a_{m,n,1},\ a_{m,n,2},\ a_{m\ n,3},\ \ldots,\ a_{m,n,P-1}$$

будет вообще системой соединенных букв; и мы придем, таким образом, к тому выводу, что $N = P^{\mu}$, где μ — некоторое число, равное числу разных индексов, в которых будет нужда. Общий вид букв будет

$$a_{k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_\mu},$$

где $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\mu$ — индексы, которые могут принять каждое из P значений $0, 1, 2, 3, \ldots, P-1$ [65].

Мы убеждаемся также способом, который мы развили, что в группе H все подстановки будут вида

$$[a_{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\mu},\ \ a_{\varphi(k_1), \psi(k_2), \chi(k_3), \ldots, \sigma(k_\mu)}],$$

так как каждый индекс соответствует одной системе соединенных букв.

Если P не есть простое число, то к группе перестановок одной какой-нибудь из систем соединенных букв применяем те же рассуждения, что

и к группе G, замещая каждый индекс некоторым числом новых индексов, и мы находим $P = R^{\alpha}$, и т. д.; откуда, наконец, $N = p^{\nu}$, где p — простое число.

ПРИМИТИВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТЕПЕНИ p^2

Остановимся на момент на изучении примитивных уравнений степени p^2, где p — простое нечетное число (случай $p = 2$ рассмотрен). Если уравнение степени p^2 разрешимо в радикалах, то предположим, прежде всего, его таким, что оно становится не примитивным при одном извлечении радикала.

Итак, пусть G — примитивная группа p^2 букв, которая разделяется на n не примитивных сопряженных с H групп.

Буквы в группе H необходимо должны расположиться так:

$$\begin{array}{lllll}
a_{0,0}, & a_{0,1}, & a_{0,2}, & a_{0,3}, & \ldots, a_{0,\,p-1}, \\
a_{1,0}, & a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, a_{1,\,p-1}, \\
a_{2,0}, & a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, a_{2,\,p-1}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
a_{p-1,0}, & a_{p-1,1}, & a_{p-1,2}, & a_{p-1,3}, & \ldots, a_{p-1,\,p-1},
\end{array}$$

где каждый горизонтальный ряд и каждый вертикальный ряд являются системой соединенных букв.

Если переставить между собой горизонтальные ряды, то группа, которую мы получим, будучи примитивной и простой степени, должна содержать только подстановки вида

$$(a_{k_1,\ k_2},\ \ a_{mk_1 + nk_2}),$$

где индексы взяты по модулю p.

То же самое будет для рядов, которые смогут дать только подстановки вида

$$(a_{k_1,\,k_3},\quad a_{k_1,\,qk_2+r}).$$

Следовательно, окончательно все подстановки группы H будут вида

$$(a_{k_2,\,k_3},\quad a_{m_1k_1+n_1,\,m_2k_2+n_2})$$

[66]. Если некоторая группа G разделится на n групп сопряженных с группой, которую мы только что написали, то все подстановки группы G должны преобразовать одна в другую циклические подстановки группы H, которые все запишутся следующим образом:

$$(a_{k_1,\,k_2},\ldots,\quad a_{k_1+\alpha_1,\,k_2+\alpha_2},\ldots). \qquad (a)$$

Итак, предположим, что одна из подстановок группы G образуется путем соответственного замещения

$$k_1 \text{ через } \varphi_1(k_1,\,k_2),$$

$$k_2 \text{ через } \varphi_2(k_1,\,k_2).$$

Если в функции φ_1, φ_2 подставить вместо k_1, k_2 значения $k_1+\alpha_1$, $k_2+\alpha_2$, то мы должны будем притти к результату вида

$$\varphi_1+\beta_1,\quad \varphi_2+\beta_2,$$

и отсюда легко непосредственно заключить, что все подстановки группы G должны быть заключены в формуле

$$(a_{k_1,\,k_2},\quad a_{m_1k_1+n_1k_2+\alpha_1,\,m_2k_1+n_2k_2+\alpha_2}). \qquad (A)$$

Но мы знаем из п. [1]), что подстановки группы G могут состоять только из p^2-1 или p^2-p букв [67]. Но p^2-p не подходит, так как в этом случае группа G будет не примитивной. Если, следовательно, в группе G рассматривать только подстановки, в которых буква $a_{0,0}$, например, сохраняет всегда свое место, то будем иметь только подстановки порядка [68] p^2-1 между p^2-1 другими буквами.

Но вспомним здесь, что мы просто лишь для доказательства предположили, что примитивная группа G разделяется на сопряженные не примитивные группы. Так как это условие не является вовсе необходимым, то группы часто более сложно составлены [69].

Дело, следовательно, в том, чтобы распознавать, в каких случаях эти группы могут допускать подстановки, в которых только p^2-p букв варьируются, и это исследование задержит нас на некоторое время.

Итак, пусть G — группа, содержащая некоторую подстановку порядка p^2-p; я, прежде всего, утверждаю, что все подстановки этой группы будут линейными, т. е. вида (A).

Справедливость этого свойства известна для подстановок порядка p^2-1; достаточно, следовательно, его доказать для подстановок порядка p^2-p. Рассмотрим поэтому только такую группу, в кото-

---

[1]) Этот мемуар составляет продолжение одной работы Галуа, которой я не обладаю, так что и не могу указать мемуар, цитируемый здесь и ниже. (*О. Ш.*)

рой все m подстановок будут или порядка p^2, или порядка $p^2 - p$ (см. цитированное место).

Тогда p букв, которые в некоторой подстановке порядка $p^2 - p$ не варьируются, должны быть соединенными буквами.

Предположим, что эти соединенные буквы суть

$$a_{0,0},\ a_{0,1},\ a_{0,2},\ \ldots,\ a_{0,p-1}.$$

Мы можем вывести все подстановки, в которых эти p букв не меняют места; мы можем из них вывести подстановки вида

$$(a_{k_1,k_2},\ a_{k_1,\varphi k_2}),$$

и подстановки порядка $p^2 - p$, периодом которых будет p членов (см. опять цитированное место).

Первые необходимо должны, для того чтобы группа обладала желаемым свойством, сводиться к виду

$$(a_{k_1,k_2},\ a_{k_1,mk_2}),$$

в силу того, что мы видели для уравнения степени p.

Что касается подстановок, периодом которых будет p членов, то так как они сопряжены с предыдущими, то мы можем предположить некоторую группу, содержащую их и не содержащую предыдущих подстановок; следовательно, они должны преобразовывать циклические подстановки (a) одну в другую; следовательно, они тоже будут линейными. Мы пришли, таким образом, к заключению, что примитивная группа перестановок p^2 букв должна содержать подстановки только вида (A).

Возьмем теперь полную группу, которую получим, производя над выражением

$$a_{k_1,k_2}$$

все возможные линейные подстановки, и исследуем, каковы делители этой группы, могущие обладать требуемым для разрешимости уравнений свойством.

Прежде всего каково полное число линейных подстановок? Во-первых, ясно, что всякое преобразование вида

$$k_1,\ k_2,\quad m_1k_1 + n_1k_2 + a_1,\quad m_2k_1 + n_2k_2 + a_2$$

не будет еще подстановкой, так как при подстановке необходимо, чтобы каждой букве первой подстановки соответствовала одна единственная буква второй, и обратно.

Если, следовательно, мы возьмем одну какую-нибудь букву из второй перестановки и вернемся к соответствующей букве первой, то мы должны будем найти некоторую букву a_{k_1,k_2} с совершенно определенными индексами. Нужно, следовательно, чтобы, каковы бы ни были l_1 и l_2, мы имели из двух уравнений

$$m_1k_1 + n_1k_2 + a_1 = l_1,\quad m_2k_1 + n_2k_2 + a_2 = l_2$$

конечные и определенные значения k_1 и k_2. Таким образом условие того, чтобы подобное преобразование действительно было подстановкой, состоит в том, что $m_1n_2 - m_2n_1$ и не равно нулю, и не делится на модуль p, что одно и то же.

Я утверждаю теперь, что, хотя эта группа линейных подстановок и не принадлежит всегда, как мы увидим, уравнению, разрешимому в радикалах, она обладает, однако, тем свойством, что если в какой-нибудь из ее подстановок имеется n фиксированных букв, то n есть делитель числа букв. И, действительно, каково бы ни было число букв, остающихся фиксированными, это обстоятельство можно выразить линейными уравнениями, которые дадут все индексы одной из фиксированных букв, посредством некоторого числа из них. Придавая каждому из этих, остающихся произвольными, индексов p значений, будем иметь p^m систем значений, где m — некоторое число. В случае, который нас занимает, m необходимо < 2 и будет, значит, 0 или 1. Следовательно, число подстановок будет не больше, чем

$$p^2(p^2-1)(p^2-p).$$

Рассмотрим теперь только те подстановки, в которых буква $a_{0,0}$ не варьируется; если в этом случае мы найдем полное число подстановок группы, содержащей все возможные линейные подстановки, то будет достаточно умножить это число на p^2.

Но, во-первых, если подставить p вместо индекса k_2, то все подстановки вида

$$(a_{k_1,\,k_2},\quad a_{m_1k_1,\,k_2})$$

дадут всего $p-1$ подстановок. Из них мы получим p^2-p, прибавляя к члену k_2 член m_2k_1 так, чтобы было

$$(k_1,\ k_2,\quad m_1k_1,\ m_2k_1+k_2). \qquad (m')$$

С другой стороны, легко найти такую линейную группу p^2-1 перестановок, что в каждой из ее подстановок все буквы, за исключением $a_{0,0}$, перемещаются. В самом деле, если мы заместим двойной индекс k_1, k_2 простым индексом k_1+ik_2, где i — первообразный корень сравнения

$$x^{p^2-1}-1=0\ (\mathrm{mod}\,p),$$

то ясно, что всякая подстановка вида

$$[a_{k_1+k_2i},\quad a_{(m_1+m_2i)(k_1+k_2i)}]$$

будет линейной подстановкой; но в этих подстановках ни одна из букв не остается на своем месте, и число их равно p^2-1.

Мы имеем, таким образом, такую систему p^2-1 перестановок, что при каждой ее подстановке перемещаются все буквы, за исключением $a_{0,0}$. Комбинируя эти подстановки с p^2-p подстановками, о которых говорилось выше, мы будем иметь

$$(p^2-1)(p^2-p) \text{ подстановок.}$$

Но мы видели a priori, то число подстановок, в которых $a_{0,0}$ остается фиксированным, не может превосходить $(p^2-1)(p^2-p)$. Следовательно, оно в точности равно $(p^2-1)(p^2-p)$, и вся линейная группа содержит всего

$$p^2(p^2-1)(p^2-p) \text{ перестановок.}$$

Остается исследовать делители этой группы, которые могут обладать свойством быть разрешимыми в радикалах. Для этого мы сделаем преобразование, которое имеет целью понизить, насколько возможно,

общие уравнения степени p^2, группа которых линейна. Прежде всего, так как циклические подстановки подобной группы таковы, что все остальные подстановки группы преобразуют их одна в другую, то можно понизить уравнение на одну степень, рассматривая уравнение степени p^2-1, группа которого будет иметь лишь подстановки вида

$$(b_{k_1,\,k_2},\ b_{m_1k_1+n_1k_2,\,m_2k_1+n_2k_2}),$$

где p^2-1 буквами являются [70]:

$$\begin{array}{c} b_{0,1},\ b_{0,2},\ b_{0,3},\ \ldots, \\ b_{1,0},\ b_{1,1},\ b_{1,2},\ b_{1,3},\ \ldots, \\ b_{2,0},\ b_{2,1},\ b_{2,2},\ b_{2,3},\ \ldots \end{array}$$

Я замечу теперь, что эта группа не примитивная, а именно, что все буквы, у которых отношение индексов одно и то же, суть соединенные буквы. Если заменить одной единственной буквой каждую систему соединенных букв, то будем иметь группу, все подстановки которой будут вида

$$\left(b_{\frac{k_1}{k_2}},\ b_{\frac{m_1k_1+n_1k_2}{m_2k_1+n_2k_2}}\right),$$

где $\frac{k_1}{k_2}$ — новый индекс. Замещая это отношение одним единственным индексом k, мы увидим, что $p+1$ буквами будут

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_{p-1},\ b_{\frac{1}{0}}.$$

и подстановки будут вида

$$\left(k,\ \frac{mk+n}{rk+s}\right).$$

Исследуем, сколько букв в каждой из этих подстановок остаются на своем месте; для этого нужно решить уравнение

$$(rk+s)\,k-m\,(mk+n)=0,$$

которое будет иметь два или один, или ни одного корня, смотря по тому, будет ли $(m-s)^2+4nr$ квадратичным вычетом, нулем или квадратичным невычетом. Сообразно этим трем случаям, подстановка будет порядка $p-1$, или p, или $p+1$.

Можно взять за тип для двух первых случаев подстановки вида

$$(k,\ mk+n),$$

в которых только буква $b_{\frac{1}{0}}$ не варьируется, и отсюда видно, что полное число подстановок приведенной группы есть

$$(p+1)\,p\,(p-1).$$

После такого приведения группы мы изучим ее в общем виде. Мы исследуем сначала, в каком случае некоторый делитель этой группы, содержащий подстановки порядка p, может принадлежать уравнению, разрешимому в радикалах.

В этом случае уравнение будет примитивным, и оно не может быть разрешимо в радикалах, если только не будет иметь места $p+1=2^n$, где n — некоторое число.

Мы можем предположить, что группа содержит подстановки лишь порядка p и $p+1$. Все подстановки порядка $p+1$ будут, следовательно, подобными, и период будет из двух членов.

Итак, возьмем выражение

$$\left(k, \frac{mk+n}{rk+s}\right)$$

и посмотрим, в каком случае эта подстановка может иметь период из двух членов. Для этого нужно, чтобы обратная подстановка совпадала с ней. Обратная подстановка есть

$$\left(k, \frac{-sk+n}{rk-m}\right).$$

Следовательно, мы должны иметь $m = -s$, и все исследуемые подстановки будут или вида

$$\left(k, \frac{mk+n}{k-m}\right),$$

или вида

$$\left(k, m+\frac{N}{k-m}\right),$$

де N — некоторое число, одно и то же для всех подстановок, так как эти подстановки должны преобразовываться одна в другую всеми подстановками $(k, k+m)$ порядка p; эти подстановки, сверх того, должны быть сопряженными одна другой. Если, следовательно,

$$\left(k, m+\frac{N}{k-m}\right), \quad \left(k, n+\frac{N}{k-n}\right)$$

две подобные подстановки, то необходимо, чтобы было

$$n+\frac{N}{\frac{N}{k-m}+m-n} = m+\frac{N}{\frac{N}{k-n}+n-m},$$

или

$$(m-n)^2 = 2N.$$

Следовательно, разность двух значений m может принимать только два различных значения; следовательно, m не может иметь более трех значений; следовательно, наконец, $p=3$. Таким образом лишь в этом случае приведенная группа может содержать подстановки порядка p.

И действительно, приведенная группа будет тогда четвертой степени и, следовательно, разрешима в радикалах.

Мы знаем отсюда, что в общем случае среди подстановок нашей приведенной группы не должны находиться подстановки порядка p. Может ли она иметь подстановки порядка $p-1$? Это то, что я хочу исследовать [1]).

. . . . . .

[1]) Я напрасно искал в бумагах Галуа продолжения настоящего отрывка. (О. Ш.)

ОТРЫВКИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ Ж. ТАННЕРИ

(BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 2-Я СЕРИЯ, т. XXX, стр. 245—248, 255—263, 1906; т. XXXI, стр. 280—308, 1907.)

А

ПРЕДИСЛОВИЕ [1])

Нижеследующий мемуар был направлен около семи месяцев тому назад в Парижскую академию наук и потерян комиссарами, которые должны были его рассмотреть. Таким образом этот труд не снискал никакого авторитета даже для того, чтобы быть прочитанным, и это обстоятельство было не последней причиной, удерживавшей автора от его опубликования. Если он на это решается, то лишь из боязни, чтобы более способные геометры, овладевая той же областью, не потеряли на ней плодов долгой работы.

[1]) Нижеследующее является наброском предисловия, которое Галуа предполагал поместить в начале мемуара по теории уравнений, который он решил опубликовать. Этот проект, зародившийся в сентябре 1830 г., не был выполнен благодаря различным затруднениям. (*О. Ш.*)

Поставленная цель состоит в определении признаков разрешимости уравнений в радикалах. Мы можем утверждать, что в чистом анализе не существует области, более темной и, быть может, более изолированной от всего остального. Новизна этой области потребовала употребления новых названий и новых обозначений. Мы не сомневаемся, что это неудобство устрашает с первых же шагов читателя, с трудом прощающего авторам, пользующимся его полным доверием, речь на новом языке. Однако нам было необходимо сообразоваться с требованиями темы, важность которой заслуживает некоторого внимания.

Задано алгебраическое уравнение с какими угодно коэфициентами, численными или буквенными; мы предлагаем полное решение вопроса: выяснить, могут ли его корни выражаться в радикалах.

Если вы мне дадите уравнение, выбранное по вашему произволу, и захотите узнать, решается ли оно в радикалах или нет, то я не смогу сделать ничего другого, как указать вам путь к ответу на ваш вопрос, не имея намерения обременять ни себя, ни кого бы то ни было его проведением на деле. Одним словом, выкладки непрактичны.

В силу этого казалось бы, что из предлагаемого нами решения нельзя извлечь никакой пользы.

И, в самом деле, это было бы так, если бы этот вопрос обычно ставился под таким углом зрения. Но бóльшая часть вопросов в приложениях алгебраического анализа приводит к уравнениям, у

которых заранее известны все свойства: свойства, при помощи которых всегда будет легко ответить на вопрос посредством правил, которые мы изложим. Действительно, для этих типов уравнений существует некоторая цепь метафизических рассуждений, которые руководят всеми выкладками и которые часто делают их бесполезными. Я приведу, как пример, уравнения, которые дают деление эллиптических функций и которые были решены знаменитым Абелем. Этот геометр пришел к ним, наверное, не в силу их числового вида. Красота и одновременно трудность этой теории состоят в том, что беспрерывно приходится указывать ход вычислений и предвидеть их результаты, никогда не имея возможности их фактически получить. Я приведу еще модулярные уравнения.

B

[Первая страница]

ДВА МЕМУАРА ПО ЧИСТОМУ АНАЛИЗУ, ЗА КОТОРЫМИ СЛЕДУЕТ РАССУЖДЕНИЕ О КЛАССИФИКАЦИИ ПРОБЛЕМ, ЭВАРИСТА ГАЛУА

[Вторая страница]

Оглавление

Мемуар об условиях разрешимости уравнения в радикалах. Мемуар о функциях вида $\int X\,dx$, где X — функция от x. Рассуждение о классификации математических проблем и о природе трансцендентных величин и функций.

[Третья страница]

(Список лиц, журналов и учебных заведений.)

[Четвертая страница]

Абель, кажется, является автором, наиболее занимавшимся этой теорией. Известно, что надеясь решить (общие) уравнения пятой степени, этот геометр пришел к доказательству невозможности этого решения. Но в немецком мемуаре, опубликованном по этому предмету, невозможность решения доказана лишь рассуждениями, относящимися к степеням вспомогательных уравнений, так что в эпоху этой публикации Абель, наверное, не знал особенных обстоятельств, связанных с решением в радикалах. Я сказал об этом мемуаре, только чтобы заявить, что он не имеет никакого отношения к моей теории.

C

ДВА МЕМУАРА ПО ЧИСТОМУ АНАЛИЗУ, Э. ГАЛУА

ПРЕДИСЛОВИЕ [71]

Cecy est un livre de bonne foi [1]).
Montaigne.

. . . . . .

Прежде алгебраические выкладки были в малой степени необходимы для прогресса математики, и весьма простые теоремы вряд ли выигрывали от

[1]) Вот искренняя книга.

перевода на язык анализа. Только начиная с Эйлера, этот язык, более краткий, сделался неизбежным для нового расширения, которое произвел в науке этот великий геометр. Начиная с Эйлера, выкладки делаются все более и более необходимыми, но также и все более и более трудными, по мере того как они прилагаются к все более и более высоким областям науки. К началу этого века алгоритм достиг такой степени сложности, что всякий прогресс при помощи этого средства сделался бы невозможным, если бы оно было лишено изящества, которое современные геометры должны были запечатлевать в своих исследованиях, и при помощи которого ум быстро и сразу охватывал большое число операций.

Очевидно, что изящество, столь восхваляемое, по столь же справедливому праву не имеет другой цели.

Из хорошо проверенного факта, что усилия наиболее выдающихся геометров имеют объектом изящество, можно с уверенностью заключить, что становится все более и более необходимым обнимать сразу несколько операций, так как ум не имеет времени останавливаться на деталях.

Однако я полагаю, что получаемые благодаря изяществу выкладок упрощения (конечно умственные упрощения; материальных это не касается) имеют свой предел; я полагаю, что наступит момент, когда предуказываемые умозрениями аналистов алгебраические преобразования не найдут для своего осуществления

ни времени, ни места; таким образом придется ограничиваться их предуказанием; я не хочу сказать, что без этого для анализа нет ничего нового; но мне кажется, что когда-нибудь без этого все будет исчерпано.

Стать обеими ногами на почву выкладок; группировать операции, сортировать их по трудности, а не по форме,—такова по-моему миссия будущих геометров; таков путь, на который я выхожу в этой работе.

Не следует смешивать мнения, которое я здесь высказываю, с аффектацией, с которой некоторые особы избегают по внешнему виду всякого рода выкладок, переводя на весьма длинные фразы то, что очень кратко выражается при помощи алгебры, и таким образом прибавляя к длиннотам операций длинноты языка, который не предназначен для их выражения. Эти особы идут позади на сто лет.

Здесь нет ничего подобного; здесь производится анализ анализа: здесь наиболее сложные выкладки [эллиптические функции], производившиеся до сих пор, рассматриваются как частные случаи, которые полезны, неизбежны для изложения, но не отбросить которые для более широких исследований было бы пагубно. Наступит время, когда специальность вопроса потребует осуществления выкладок, предуказанных этим высоким анализом и распределенных по трудностям, но не уточненных по форме.

Возвещаемое мною общее положение может стать понятным только после внимательного прочтения моего труда, который является его приложением,

чтобы, таким образом, теоретическая точка зрения не предшествовала приложению; но при окончании своей книги я спросил себя о причинах, делающих ее странной для большинства читателей и, вникнув в самого себя, я усмотрел их в склонности моего ума избегать выкладок в рассматриваемых мною вопросах; более того, я убедился в непреодолимости затруднений для того, кто хотел бы осуществить [выкладки] в общем виде для рассматриваемого мной предмета.

Можно предвидеть, что, излагая столь новые вещи, столь смелые по своему необычному пути, я буду часто встречать затруднения, которые не смогу преодолеть. Поэтому в этих двух мемуарах, и особенно во втором, более позднем, будет часто попадаться формула: „я не знаю“. Категория читателей, о которой я говорил вначале, не преминет найти в этом смешное. Они, к несчастью, не подозревают, что наиболее ценной книгой наилучшего ученого является та, в которой он сознается во всем, чего не знает; не подозревают, что автор никогда так не вредит своим читателям, как когда он скрывает затруднение. Когда конкуренция, т. е. эгоизм, перестанет царить в науках, когда, для того чтобы исследовать, будут объединяться, вместо того, чтобы посылать в академии запечатанные пакеты, тогда будут стараться печатать малейшие замечания, как мало они ни были бы новы, и прибавлять: „остального я не знаю“.

De S^{te} Pélagie X^{bre} 1831
Évariste Galois.

D

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ. РАССУЖДЕНИЯ О ПРОГРЕССЕ ЧИСТОГО АНАЛИЗА [72]

Известно, что из всех человеческих знаний чистый анализ является наименее материальным, в наивысшей степени логическим, единственным, которое ничего не заимствует из данных чувств. Многие заключают из этого, что он в своей совокупности наиболее методичен и наилучшим образом координирован. Но это — ошибка. Возьмите книгу по алгебре, дидактическую или исследовательскую, и вы увидите спутанную кучу предложений, закономерность которых находится в странном контрасте с общим беспорядком. Производит впечатление, что уже идеи слишком дорого обходятся автору для того, чтобы он задал себе труд их связать, и что его разум, исчерпанный концепциями, составляющими основу его труда, не может породить мысли, которая бы управляла их совокупностью.

Какой бы метод или связь, или координацию, вы ни встретили, все это фальшиво и искусственно. Все это подразделения без основания, произвольные, чисто условные размещения. Этот недостаток, худший, нежели отсутствие всякого метода, в особенности встречается в дидактических трудах, в большинстве составляемых людьми, не имеющими понимания науки, которую они преподают.

Все это сильно удивит, людей, широкого круга, которые вообще понимают слово математика как синоним закономерного.

Люди будут удивлены, если представят себе, что здесь, как и везде, наука есть продукт человеческого разума, более предназначенного к познаванию, чем к знанию, более к отыскиванию, чем к нахождению истины. В самом деле, представляют себе, что разум, который был бы в состоянии охватить сразу совокупность математических истин, не только известных, но и вообще всех возможных, мог бы закономерно и как бы механически вывести их из нескольких принципов, в соединении с единообразными методами; тогда большинство препятствий, большинство тех трудностей, которые ученый [... неразборчиво]. Но это не так; если задача ученого более трудна и, следовательно, более прекрасна, то ход науки менее правилен [:] наука прогрессирует посредством ряда комбинаций, где случайность играет не меньшую роль; ее жизнь груба и напоминает жизнь минералов, которые увеличиваются посредством нарастания. Это имеет место не только для науки, такой, какая получается как результат исследований ряда ученых, но также для специальных исследований каждого из них. Напрасно бы аналисты хотели скрыть это от себя: они не выводят, а комбинируют и сравнивают; они приходят к истине, толкая то с одной, то с другой стороны, какая только попадется.

Дидактические сочинения должны разделить с исследовательскими недостаток в уверенном развертывании каждый раз, когда тема, которую они излагают, не была освещена по-другому. Они могли бы выбрать действительно методическую форму только для очень узкого материала. Для того чтобы дать таковую, потребовалось бы глубокое понимание анализа, и бесполезность предприятия отталкивает тех, которые могли бы преодолеть эту трудность.

E

Было бы несоответственно с важностью настоящей заметки вступать в подобную борьбу с личными чувствами терпимости или вражды по отношению к ученым. Автор статей избежит в равной мере обоих подводных камней. Если тягостное прошлое гарантирует его от первого, то глубокая любовь к науке, которая заставляет его уважать тех, кто ее культивирует, укрепит его беспристрастность против второго.

Тяжело в науках ограничиваться ролью критика: мы это будем делать по принуждению и с усилием. Если наши силы нам это позволят, мы после порицания укажем, что́ на наш взгляд является лучшим. Мы таким образом будем иметь случай привлекать внимание читателя к новым идеям, которые руководили нами в изучении анализа. Мы позволим себе заняться этими идеями теперь же, чтобы потом к ним не возвращаться.

В менее абстрактных темах, в области искусства, было бы в высшей степени смешно помещать

в начале труда критику своих собственных произведений: это бы означало слишком наивное признание в том, что́ в сущности почти всегда бывает верным, что люди берут себя в качестве типа, к которому относят объекты, чтобы о них судить; но здесь речь идет не о выполнении, а о наиболее абстрактных идеях, которые только даны человеку для постигания; здесь критика и изложение делаются синонимами, и излагать— это означает сопоставлять свои идеи с идеями других.

Мы здесь изложим, в нескольких абзацах, то, что есть наиболее общего, наиболее философского в исследованиях, которые тысяча обстоятельств помешали опубликовать раньше. Мы их представим изолированно, без усложнения примерами и дополнениями, которые у аналистов обычно затопляют общие концепции. Кроме того, мы их изложим добросовестно, указывая без уловок путь, который привел нас к ним, и затруднения, которые нас остановили, ибо мы хотим, чтобы читатель был осведомлен, так же как и мы, о материале, который мы будем излагать. Если эта цель будет выполнена, мы будем сознавать, что поступили хорошо, если не в силу выгоды, которую непосредственно извлечет наука, то хотя бы, на данном примере, в силу добросовестности, которая до сего дня не встречалась.

F

Здесь, как и во всяких науках, каждая эпоха имеет определенного рода вопросы дня: существуют актуальные вопросы, которые привлекают к себе

сразу наиболее светлые умы, как бы вопреки им, и без которых [неразборчиво] главенствовал бы на таком состязании. Часто кажется, что одни и те же идеи родятся у нескольких, подобно откровению. Если поискать причину этого, то легко найти ее в трудах тех, которые им предшествовали, где представлены эти идеи без ведома их авторов.

Наука до сих пор не обнаружила большей части этих совпадений, так часто наблюдаемых в исследованиях ученых. Их главными плодами являются прискорбная конкуренция, унизительное соперничество. Однако не трудно усмотреть в этом факте доказательство того, что ученые не более, чем другие, созданы для изолированности, что они также принадлежат к своей эпохе и что рано или поздно они соединят свои усилия. Сколько тогда времени сбережется для науки!

Аналистов теперь занимает много вопросов нового типа. Вскрыть [связь между вопросами, которые мы] привлечем . . .

G

Все видеть, все слышать,
не терять ни одной мысли.

28 июля 1831 г.

НАУКИ. ИЕРАРХИЯ. ШКОЛЫ [73]

Иерархия есть средство даже для низшего.

Не завистливый и не честолюбивый имеет нужду в искусственной иерархии, чтобы победить зависть или затруднения.

До тех пор, пока человек не скажет: „наука — это я“, он должен иметь имя, которое бы противопоставлял тем, с кем он борется. Иначе его честолюбие будет принято за зависть.

Прежде чем быть королем, надо быть аристократом. Маккиавелли.

Интрига есть игра. Если удается то, из-за чего ведется интрига, этим выигрывается все. Если нет, теряется часть.

Профессоров побеждают посредством академии, академию — посредством прошлого, прошлое — посредством другого прошлого.

Вот [неразборчиво] Виктор Гюго. Возрождение, Средние века, наконец, я.

Потребности побеждать человека другим человеком, век — другим веком, нужно приписать возникновение литературных или научных противодействий, которые долго не тянутся. Аристотель, Птолемей, Декарт, Лаплас.

[Неразборчивая строка.]

Человек, обладающий какой-нибудь идеей, имеет выбор: или иметь в течение своей жизни колоссальную репутацию ученого человека, или же создать себе школу, молчать и оставить большое имя в будущем. Первое имеет место, если пользоваться своей идеей, не высказывая ее; второе — если ее опубликовать. Есть третий способ, средний между обоими другими. Это и публиковать и пользоваться; тогда сделаешься смешным.

H [1])

[Первый листок]

Перестановки. Число букв m.

Подстановки. Обозначение.

Период. Обратные подстановки. Подобные подстановки. Циклические подстановки. Порядок. Другие подстановки.

Группы. Подобные группы. Обозначение.

Теорема I. Подстановки, общие двум группам, образуют группу.

Теорема II. Если группа содержится в другой, то последняя является суммой известного числа групп, подобных первой, которую будем называть ее *делителем*.

Теорема III. Если число перестановок группы делится на p (p — простое число), то эта группа содержит подстановку, период которой состоит из p членов.

Приведение групп, зависимых или независимых. Неприводимые группы.

ГРУППЫ ВООБЩЕ НЕПРИВОДИМЫЕ

Теорема. Среди перестановок группы всегда есть одна, в которой заданная буква занимает заданное место, и если рассматривать в неприводимой группе только перестановки, где некоторая буква занимает

---

[1]) Bulletin des Sciences Mathématiques (2), т. XXXI, стр. 280—308, 1907.

одно и то же место, то получаемые таким образом перестановки образуют группу. Пусть n будет число перестановок этой последней mn.

Новое доказательство теоремы относительно знакопеременных групп.

Теорема. Если группа содержит одну полную подстановку порядка m и одну порядка $m-1$, то она неприводима.

Исследование неприводимых групп. Примитивная и непримитивная группы. Свойство корней.

Можно предположить, что группа содержит только четные подстановки.

Всегда существует полная сопряженная система из m подстановок, если $m = 4n$ и $4n+1$, и полная сопряженная система из $\frac{m}{2}$ подстановок, если $m = 4n+2$.

Следовательно, $t = m-2$ в первом случае и $t = \frac{m-2}{2}$ во втором.

[Второй листок]

Приложение к теории функций и алгебраических уравнений. Подобные функции. Сколько может быть подобных друг другу функций. Г-н Коши. Группы, принадлежащие к функциям. Более общая теорема в случае $m > 4$. Каковы функции, которые принимают только m значений или которые, содержа только четные подстановки, принимают только $2m$ значений.

Теорема. Если функция от m переменных задана уравнением более низкой, чем m-я, степени, все коэ-

фициенты которого суть симметрические или знакопеременные функции от этих переменных, то эта функция сама будет симметрической [или знакопеременной], если $m > 4$.

Теорема. Если функция от m переменных задана уравнением степени m, коэфициенты которого и т. д., [то] эта функция будет симметрической или знакопеременной относительно всех букв или по крайней мере относительно $m-1$ из этих букв.

Теорема. Ни одно алгебраическое уравнение выше четвертой степени не может быть ни решено, ни понижено.

О случае, когда функция от корней уравнения, группа которого есть G, известна.

Теорема. Пусть H — группа функции φ от корней, G — делитель H, тогда φ не зависит [более чем от одного] уравнения n-й степени.

Можно привести к этому случаю тот, когда предположены известными несколько функций.

1-й случай. Когда группа, принадлежащая к известной функции, приводима. Случай, когда к ней принадлежит одна единственная перестановка.

2-й случай. Когда группа, принадлежащая к функции, неприводима и непримитивна.

3-й случай. Когда группа, принадлежащая к функции, примитивна и m — простое число.

4-й случай. Когда группа, принадлежащая к функции, примитивна и $m = p^2$.

5-й случай. Когда группа примитивна, и $m-1$ простое число или квадрат простого числа.

ЗАМЕТКА О ЧИСЛЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ

Что разумеется под совокупностью перестановок уравнения.

О случае, когда эта совокупность образует группу.

Существует только одно обстоятельство, при котором мы убедились, что это непременно должно иметь место. Это — когда все корни суть рациональные функции от какого-нибудь из них. Доказательство.

Это несобственно, и т. д. Вообще все, что мы сказали, приложимо с точностью до этой перемены. 1. Теорема. Если уравнение обладает упомянутым свойством, то всякая функция от корней, не изменяющаяся от $m-1$ сопряженных подстановок, будет известна, и обратно. 2. Теорема, вытекающая из предыдущего замечания. Всякое уравнение, корни которого суть рациональные функции от первого корня, обладает тем же свойством. 3. Следствие. Если a есть мнимый корень подобного уравнения и fa его сопряженный, то fx вообще будет сопряженным с любым мнимым корнем x.

Можно легко перейти от этого случая к такому, когда если один корень известен, то некоторые из корней зависят от него как рациональные функции. Действительно, пусть это будут

$$x,\ \varphi_1 x,\ \varphi_2 x,\ \ldots$$

Эти корни, если взять, и т. д.

Легко видеть, что тот же метод разложения прилагается к случаю, когда в совокупности перестановок уравнения n одних и тех же букв занимают всегда n тех же мест (отвлекаясь от порядка), если одна единственная из этих букв занимает одно из этих мест, и для этого нет необходимости, чтобы совокупность этих перестановок составляла группу.

I

Группой называют такую систему перестановок, что и т. д. Мы обозначим эту совокупность через G.

GS есть группа, получаемая, если произвести над группой G подстановку S. Она называется подобной [группой].

Одна группа может сильно отличаться от другой и [все-таки] иметь одинаковые подстановки. Такая группа вообще не будет GS.

Приводимая группа есть группа, в перестановках которой n букв не выходят из n определенных мест. Такова группа

$$\begin{array}{lll} abcde & abdec & abecd \\ bacde & badec & baecd \end{array}$$

Неприводимая группа, и т. д.

Неприводимая группа есть такая, что заданная буква занимает [любое] заданное место. В самом деле, предположим, что одно место может принадлежать только n буквам. Тогда и т. д.

Непримитивная неприводимая группа есть такая, у которой имеем n мест и n букв такого рода, что

одна из букв не может занимать одно из этих мест, без того чтобы [остальные] n букв занимали [эти] n мест.

Мы видим, что буквы разделяются на категории, по n букв, такого рода, что n рассматриваемых мест могут быть заняты сразу только одной из этих категорий.

Дана подстановка S и две подстановки A и A', требуется найти такую подстановку S', чтобы буква, лежащая в A на k-м месте, в AS принимала φk-е место, и в то же время буква, лежащая в A' на k-м месте, в $A'S'$ принимала φk-е место.

Предположим, что задача решена. Пусть $A' = AT$; тогда, очевидно,

$$A'S' = AST,$$

откуда

$$TS' = ST,$$
$$S' = T^{-1}ST.$$

Если обозначить n букв значками

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

то всякая перестановка может быть представлена так:

$$\varphi 1,\ \varphi 2,\ \varphi 3,\ \ldots,\ \varphi n,$$

где φ — соответственно подобранная функция, и подстановка, переводящая первую перестановку во вторую, есть $(k,\ \varphi k)$, где k обозначает произвольный значок.

Вместо обозначения букв цифрами можно было бы обозначать места цифрами.

J

. . . . . .

уравнений. Поэтому мы ограничимся приведением определений, необходимых для понимания дальнейшего, и покажем связь, существующую между обеими теориями.

§ 2. КАК ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ ЗАВИСИТ ОТ ТЕОРИИ ПЕРЕСТАНОВОК

6. Рассмотрим уравнение с какими-нибудь коэффициентами и будем считать рациональной всякую величину, которая рационально выражается через коэффициенты уравнения и некоторое число других, *присоединенных* иррациональных величин, которые можно предположить a priori известными.

Если какая нибудь функция от корней не меняет численной величины от некоторой подстановки, произведенной над корнями, она называется инвариантной относительно этой подстановки. Очевидно, что функция может быть инвариантной относительно той или другой подстановки над корнями, без того чтобы на это указывала ее форма. Так, если $F(x) = 0$ есть заданное уравнение, то функция $\varphi[F(a),\ F(b),\ F(c),\ \ldots]$ (φ — произвольная функция, $a,\ b,\ c, \ldots$ — корни) является функцией от корней, инвариантной относительно всякой подстановки, без того чтобы вообще ее форма на это указывала.

Является вопросом, на который, кажется, еще не было дано ответа, узнать, если дана функция от

нескольких численных величин, можно ли найти группу, которая содержит все подстановки, относительно которых эта функция инвариантна, и не содержит других.

Ясно, что это имеет место для буквенных величин, так как функция от нескольких букв, инвариантная относительно двух подстановок, инвариантна и относительно их произведения. Но ничто не указывает на то, что то же самое всегда имеет место, если вместо букв подставить числа.

Поэтому ни в коем случае нельзя рассматривать все уравнения как буквенные. Надо прибегнуть к исследованиям, основанным на частных свойствах каждого численного уравнения. Я хочу постараться это сделать.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЙ

7. Заметим, что все частное, которым может обладать численное уравнение, должно вытекать из некоторых соотношений между корнями. Эти соотношения будут рациональны в том самом смысле, в каком мы согласились, т. е. они содержат в качестве иррациональностей только коэфициенты уравнения и присоединенные величины. Более того, [эти] соотношения не должны быть инвариантны относительно всякой подстановки, производимой над корнями, без чего мы бы [не имели] ничего нового по сравнению с буквенными уравнениями.

Важно знать, относительно каких подстановок могут быть инвариантны соотношения между корнями

или, что сводится к тому же, функции от корней, численные значения которых могут быть рационально определены.

Для этого докажем следующую теорему, крайне важную для рассматриваемого круга проблем: *„Если дано уравнение с некоторым числом присоединенных величин, то всегда существует определенная группа перестановок, все подстановки которой таковы, что всякая функция от корней, инвариантная относительно этих подстановок, рационально известна, и такая, что, обратно, функция не может быть рационально определяемой, если только она не инвариантна относительно этих подстановок, которые мы назовем подстановками уравнения“*. (В случае буквенных уравнений эта группа есть не что иное, как совокупность всех перестановок корней, так как известны только симметрические функции.)

Для большей простоты предположим в доказательстве нашей теоремы, что она доказана для всех уравнений низших степеней; это можно всегда допустить, так как она очевидна для уравнений второй степени.

Допустим это для всех степеней ниже m; чтобы доказать для m-й, будем различать четыре случая:

1-й случай. Уравнение распадается на два или большее число множителей.

Пусть $U = 0$ — уравнение, $U = VT$, где V и T — функции, коэфициенты которых рационально определяются при помощи коэфициентов заданного уравнения и присоединенных величин.

Я покажу, что при сделанном предположении можно найти группу, которая удовлетворяет поставленному условию.

Заметим здесь, что в этого рода вопросах, когда речь идет о подстановках, по отношению к которым инвариантны функции, если какая-либо группа удовлетворяет условию, то ему будет удовлетворять всякая группа, имеющая те же подстановки. Следовательно, можно всегда исходить от произвольной, но определенной перестановки, чтобы определить подлежащие рассмотрению группы. При таком способе мы избежим всякой неопределенности.

В данном случае ясно, что если мы присоединим к уравнению $U = 0$ все корни уравнения $V = 0$, то уравнение $U = 0$ разобьется на множители, из которых один будет $T = 0$, а остальные — простыми множителями V.

Пусть H — группа, получаемая при производстве над производной перестановкой A корней уравнения $U = 0$ всех подстановок, относящихся к уравнению $T = 0$, когда мы [к нему] присоединяем корни $V = 0$.

Пусть K — группа, получаемая при производстве всех подстановок, относящихся к $V = 0$, когда к нему присоединить только первоначально присоединенные величины.

Комбинируйте всеми способами все подстановки группы H с [подстановками] группы K. Вы получите приводимую группу, и я говорю, что она удовлетворяет требуемому в поставленном вопросе условию.

В самом деле, всякая функция, инвариантная от подстановок группы ...

Пусть G — группа, соответствующая уравнению $\psi = 0$, и $A, B, C, \ldots$ — перестановки группы G. Чтобы получить подобную группу, надо произвести над перестановкой A все подстановки уравнения ψ. Предположим, что перестановка A содержит все корни уравнения $F(x) = 0$.

Возьмем функцию $\Phi(A\Sigma)$, инвариантную относительно подстановок Σ корней φ, которые соответствуют указанным подстановкам, если вместо корней уравнения φ подставить их выражения через корни уравнения ψ. Я говорю, что получится группа перестановок, которая удовлетворит требуемому условию по отношению к первоначальному уравнению $F(x) = 0$. В самом деле, всякая функция от корней, инвариантная относительно подстановок этой группы, сможет быть выражена как функция от отдельных корней уравнения ψ. Более того, так как эта преобразованная функция будет опять инвариантна относительно подстановок уравнения ψ, то видно, что ее численное значение ...

K

Пусть $\varphi(H)$ есть некоторая функция, инвариантная относительно подстановок группы H, но не относительно подстановок группы G. Имеет место:

$$\varphi(H) = f(r),$$

где функция f содержит в своем выражении только ранее известные величины.

Исключим алгебраически r из уравнений

$$r^p = A, \quad f(r) = z.$$

Получим неприводимое уравнение p-й степени относительно z. (Иначе z была бы функцией от r^p, что противоречит предположению.) Теперь пусть S будет одна из подстановок группы G, не входящих в H. Очевидно, что $\varphi(HS)$ также будет корнем вышеприведенного уравнения для z, так как коэфициенты этого уравнения инвариантны относительно подстановки S.

Следовательно, будет иметь место

$$\varphi(HS) = f(\alpha r),$$

где α — один из корней из единицы.

Оба уравнения:

$$\varphi(H) = f(r), \quad \varphi(HS) = f(\alpha r),$$

по исключении r дадут соотношение между

$$\varphi(H), \quad \varphi(HS) \text{ и } \alpha,$$

независимое от r, и то же соотношение будет иметь место между

$$\varphi(H) \quad \text{и} \quad \varphi(HS^2).$$

Итак, из

$$\varphi(HS) = f(\alpha r)$$

выводим

$$\varphi(HS^2) = f(\alpha^2 r),$$

и т. д. до

$$\varphi(HS^p) = f(r) = \varphi(H).$$

Таким образом значение единственной величины r дает сразу все функции, соответствующие группам

$$H, HS, HS^2, \ldots,$$

сумма этих групп есть, очевидно, G, так как всякое ...

L

Если задано уравнение с какими угодно присоединенными величинами, то всегда можно найти некоторую функцию от корней, которая численно инвариантна относительно всех подстановок заданной группы и не инвариантна относительно других подстановок.

Если группа уравнения разлагается на n подобных групп $H, HS, HS^2, \ldots$ и функция $\varphi(H)$ инвариантна относительно всех подстановок группы H и ни относительно какой другой подстановки группы G, то эта функция есть корень неприводимого уравнения n-й степени, и другие его корни суть $\varphi(HS), \ldots$

M

ЗАМЕТКА

Не примитивными называют уравнения, которые, будучи, например, степени mn, распадаются на m множителей степени n при помощи одного единственного уравнения степени m. Таковыми являются уравнения Гаусса. Примитивные уравнения суть те, которые не допускают подобного упрощения. Я пришел относительно примитивных уравнений к следующим результатам:

1. Чтобы примитивное уравнение решалось в радикалах, нужно, чтобы было $m = p^\nu$, где p — простое число.

2. Если исключить случай $m = 9$ и $m = p^p$, то уравнение будет таково, что, зная два каких-нибудь из его корней, мы выразим через них рационально остальные.

3. В случае $m = p^p$, зная два корня, мы выразим через них остальные во всяком случае при помощи одного единственного радикала p-й степени.

4. Наконец, в случае $m = 9$ уравнение должно быть такого же рода, как те, которые определяют трисекцию эллиптических функций.

Доказательство этих предложений основано на теории перестановок.

N

ДОБАВЛЕНИЕ К МЕМУАРУ О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

Лемма I. Пусть G — группа из $mt \cdot n$ перестановок, которая разлагается на n групп, подобных H. Предположим, что группа H разлагается на t групп по m перестановок, подобных K.

Если среди всех подстановок группы G подстановки группы H являются единственными, могущими преобразовать одна в другую некоторые подстановки группы K, то имеет место $n \equiv 1 \pmod m$, или $tn \equiv t \pmod m$ [74].

Лемма II. Если μ — простое число и p — какое-нибудь целое число, то имеет место

$$(x-p)(x-p^2)\dots(x-p^{\mu-1}) \equiv \frac{x^\mu - 1}{x-1} \left(\mathrm{mod}\ \frac{p^\mu - 1}{p-1}\right) [75].$$

Эти леммы позволяют видеть, в каких случаях примитивная группа степени p^ν (где p — простое число) может принадлежать уравнению, разрешимому в радикалах.

В самом деле, назовем через G группу, которая содержит все возможные линейные подстановки над $\frac{p^\nu - 1}{p-1}$ буквами. (См. цитированный мемуар.) Пусть, если это возможно, L будет группа, которая делит G, а сама разбивается на p групп, подобных K, причем K не содержит двух перестановок, в которых какая-нибудь буква занимала бы одно и то же место. Можно доказать, что 1° если в группе G, но вне группы L, существует подстановка S, которая преобразует одна в другую какие-нибудь подстановки группы K, то эта подстановка будет состоять из r членов, где r — делитель $p-1$. Отсюда в силу того, что число перестановок группы G равно

$$\frac{p^\nu - 1}{p-1} \cdot (p^\nu - p^{\nu-1})(p^\nu - p^{\nu-2})\dots(p^\nu - p^2)(p^\nu - p),$$

мы в силу леммы I должны иметь [1])

$$(p^\nu - p^{\nu-1})(p^\nu - p^{\nu-2})\dots(p^\nu - p^2)(p^\nu - p) \equiv \equiv p^k r \left(\mathrm{mod}\ \frac{p_\nu - 1}{p-1}\right).$$

---

[1]) Произведение

$$(p^\nu - p)(p^\nu - p^2)(p^\nu - p^3)\dots(p^\nu - p^{\nu-1}),$$

кроме случая $\nu = 2$, не допускает простых множителей $> \frac{p^\nu - 1}{\partial\,(p-1)}$, где ∂ — общий наибольший делитель ν и $p-1$. (*Прим. Галуа*)

Отсюда видно, что ν должно быть простым числом (лемма II).

$$pr \equiv \nu \left(\mathrm{mod}\ \frac{p^\nu - 1}{p-1}\right).$$

Отсюда при $\nu > 2$ получается $pr = \mu$, т. е. $p = \nu$, так как p и μ являются простыми числами.

Таким образом теорема, которую я высказал в своем мемуаре, верна во всяком другом случае, кроме того, когда p возводится в p-ю степень.

Мы всегда должны иметь

$$r = 1$$

и

$$L = H.$$

Даже в случае p^p-й степени группа приведенного уравнения степени $\frac{p^p-1}{p-1}$ должна состоять из $\frac{p^p-1}{p-1}p$ перестановок. Таким образом правило очень просто и в этом случае.

Как видно, нужно, чтобы 1) $\nu = 1$, 2) чтобы группа приведенного уравнения состояла из $\frac{p^p-1}{p-1}p$ перестановок.

О

В мемуаре по теории уравнений я показал, как можно решить алгебраическое уравнение простой степени m с корнями $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, если предположить известным значение функции от корней, которая

остается инвариантной только относительно подстановок вида (x_k, x_{ak+b}). Но оказывается непредвиденным образом, что предложенный в этом мемуаре метод с успехом применяется к делению эллиптической функции первого класса на простое число равных частей. Мы могли бы, со всей строгостью, ограничиться изложением этого деления, и проблема деления функций первого класса могла бы считаться решенной.

Но чтобы сделать это решение более общим, мы зададимся целью разделить эллиптическую функцию первого класса на m равных частей, где $m = p^n$ и p — простое число.

Для этого распространим изложенный в цитированном мемуаре метод на случай, когда степень уравнения есть степень простого числа. Будем всегда предполагать, что корни суть $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ и что мы знаем значение функции от этих корней, которая остается инвариантной только относительно подстановок вида $(k, ak+b)$.

В этом выражении k и $ak+b$ будут означать наименьшие вычеты этих величин относительно m. Среди подстановок этого вида, которые мы для краткости будем называть линейными подстановками, мы, разумеется, можем допустить только те, в которых a взаимно простое с m, без чего $ak+b$ замещало бы сразу несколько k.

Приняв это, перейдем к решению указанного класса уравнений.

§ 1. *РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СТЕПЕНИ p^n В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ, ЧТО ИЗВЕСТНО ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ, ИНВАРИАНТНОЙ ТОЛЬКО ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНЫХ ПОДСТАНОВОК*

Если сравнение $k = ak + b$ имеет только одно решение, то очевидно, что функция, которую мы предполагаем известной, не инвариантна относительно всякой подстановки, в которой две буквы сохраняют тоже место.

Поэтому если мы mutatis mutandis приложим к этому случаю рассуждения, употребленные в цитированном мемуаре, то проверим справедливость следующего предложения:

„Если предположить известным значение рассматриваемой функции, то каждый корень всегда рационально выразится через два других, и полученное таким образом равенство будет инвариантно относительно подстановок вида $(k,\ ak + b)$".

Итак, пусть

$$x_2 = f(x_1, x_0);$$

отсюда выведем вообще

$$x_{2a+b} = f(x_{a+b},\ x_b);$$

это равенство, примененное всеми способами, даст выражение любого из корней через любые два других, для чего надо последовательно подставлять выражения корней, которые входят в это равенство.

Имея это, возьмем симметрическую функцию Φ от корней $x_0, x_p, x_{2p}, x_{3p}, \ldots, x_{(p^{n-1}-1)p}$, получится:

$$\begin{aligned}
&\Phi\ (x_0,\ x_p,\ x_{2p},\ \ldots) &&= \Phi_0,\\
&\Phi\ (x_1,\ x_{p+1},\ x_{2p+1},\ \ldots) &&= \Phi_1,\\
&\Phi\ (x_2,\ x_{p+2},\ x_{2p+2},\ \ldots) &&= \Phi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&\ldots\\
&\Phi\ (x_{p-1},\ x_{2p-1},\ \ldots) &&= \Phi_{p-1};
\end{aligned}$$

предположим, что вообще $\Phi_{k+p} = \Phi_k$. Всякая функция от величин Φ, инвариантная относительно линейных подстановок над этими величинами, будет, очевидно, функцией, инвариантной относительно линейных подстановок над $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. Таким образом мы будем знать a priori всякую функцию от величин $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{p-1}$, инвариантную относительно линейных подстановок над этими величинами. Следовательно, можно 1) образовать уравнение, корнями которого являются эти величины (так как всякая симметрическая функция тем более инвариантна относительно этих подстановок); 2) решить это уравнение.

Отсюда следует, что всегда можно, при помощи алгебраически разрешимого уравнения степени p, разбить заданное уравнение на множители, корни которых будут соответственно:

$$\begin{array}{llll}
x_0, & x_p, & x_{2p}, & x_{3p}, \ \ldots\\
x_1, & x_{p+1}, & x_{2p+1}, & x_{3p+1}, \ \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Из того, что в каждом множителе мы будем иметь выражение корня через два других, например, в первом:

$$f = (x_p, x_0) = x_{2p},$$

и что это выражение инвариантно относительно всякой линейной подстановки, видно, что каждый множитель может быть рассматриваем как заданное уравнение, и что путем постепенного понижения проблема может быть в конце концов решена.

Следовательно, можно считать разрешимыми уравнения, в которых нам будет известно значение функции от корней, инвариантной только относительно линейных подстановок, если степень уравнения есть степень простого числа.

Итак, мы можем перейти к решению общей проблемы деления трансцендентностей первого класса, так как всякая дробь является суммой дробей, знаменатели которых суть степени простых чисел, а потому достаточно научить делить эти трансцендентности на p^n равных частей.

§ 2. *ДЕЛЕНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЕЙ ПЕРВОГО РОДА НА $m = p^n$ РАВНЫХ ЧАСТЕЙ*

Определим каждую трансцендентность при помощи синуса ее амплитуды. Можно было бы таким же образом взять косинус или тангенс, и мы бы ничего не изменили в том, что будем сейчас говорить.

Обозначим через (x, y) синус суммы трансцендентностей, синусы [амплитуды] которых суть x и y.

Если x есть синус трансцендентности, то пусть $(x)^k$ будет обозначать синус в k раз большей трансцендентности.

Ясно, что $(x, -y)$ будет синус разности трансцендентностей, которые имеют синусами x и y, соответственно с обозначением для сумм.

Имея это, начнем с замечания о природе величин, удовлетворяющих уравнению $(x)^m = 0$.

Если обозначить один из этих корней через p, то ясно, что $(p)^k$ будет другим корнем. Таким образом мы будем иметь последовательность корней, выраженную через (p), $(p)^2$, $(p)^3$, ..., $(p)^{m-1}$. Так как число корней больше m, то пусть q будет один из корней, не содержащихся в этой последовательности, и $(q)^l$ будет другой корень, отличный от q и от предыдущих. В самом деле, если было бы $(p)^h = (q)^l$, то мы бы отсюда вывели $q = (p)^g$, где g — целое число.

Таким образом, беря обе последовательности p, $(p)^2$, ... и q, $(q)^2$, ..., мы найдем в качестве общего выражения корней уравнения $(x)^m = 0$ выражение

$$((p)^k, (q)^l).$$

Имея это, предположим, что нам дано решить уравнение $(x)^m = \sin A$, где m — нечетное число вида p^n. Если x есть один из корней, то ясно, что все остальные будут

$$(x, (p)^k, (q)^l).$$

В связи с этим положим вообще:

$$(x, (p)^k, (q)^l) = x_{k.l};$$

полагая $x = x_{0.0}$, мы выведем отсюда вообще

$$(x_{2a+b.2c+d}, -x_{a+b.c+d}) = (x_{a+b.c+d}, -x_{b.d}),$$

откуда

$$(x_{2a+b.2c+d}) = ((x_{a+b.c+d})^2, -x_{b.d}).$$

Но из этого равенства легко вывести рациональное выражение $x_{2a+b.2c+d}$ через $x_{a+b.c+d}$ и $x_{b.d}$. Действительно, если φ есть дуга, соответствующая какому-нибудь из синусов, которые удовлетворяют уравнению $(x)^m = \sin A$, то, чтобы иметь выражение $\cos\varphi$ через $\sin\varphi$, достаточно найти общий наибольший делитель уравнений $x^2 + y^2 = 1$ и $f(y) = \cos A$, где $f(y)$ есть косинус трансцендентности, в m раз большей, чем та, косинус которой есть y. Таким же образом найдем и рациональное выражение $\Delta\varphi$ через $\sin\varphi$.

Следовательно, можно, при помощи известных формул, выразить

$$x_{2a+b.2c+d} = f(x_{a+b.c+d},\ x_{b.d})$$

в виде рациональной функции от $x_{a+b.c+d}$ и $x_{b.d}$.

Имея это, докажем следующее предложение:

„Всякая рациональная функция от $x_{0.0}$, $x_{1.0}$, $x_{0.1}$, ..., инвариантная относительно подстановок вида $(x_{k.l},\ x_{ak+b.cl+d})$, непосредственно известна".

В самом деле, сначала можно сделать эту функцию функцией только от $x_{0.0}$, $x_{0.1}$, $x_{1.0}$, исключая остальные корни. Эта функция не будет изменять

значения, если вместо $x_{0.0}$, $x_{0.1}$, $x_{1.0}$ подставить $x_{0.0}$, $x_{0.1}$, $x_{k.l}$, где k не равно нулю.

Но так как всякий корень вида $x_{0.l}$ выражается в виде рациональной функции от $x_{0.0}$ и $x_{0.1}$, то выходит, что всякая симметрическая функция от корней, в которых первый значок не нуль, будет известна, как целая рациональная функция от $x_{0.0}$ и $x_{0.1}$. Поэтому только что рассмотренная функция, оставаясь инвариантной при замене $x_{1.0}$ на какой-нибудь из корней, у которого первый значок не нуль, является функцией только от $x_{0.0}$ и $x_{0.1}$. Исключая из этой функции $x_{0.1}$, сделаем ее функцией только от $x_{0.0}$ и, наконец, известной величиной.

Таким образом принцип доказан.

Пусть теперь F будет симметрическая функция от некоторых корней заданного уравнения. Положим:

$$F(x_{0.0}, x_{0.1}, x_{0.2}, \ldots) = y_0,$$
$$F(x_{1.0}, x_{1.1}, x_{1.2}, \ldots) = y_1,$$
$$F(x_{2.0}, x_{2.1}, x_{2.2}, \ldots) = y_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Возьмем функцию от y_0, y_1, y_2, ..., инвариантную относительно линейных подстановок над этими величинами. Ясно, что эта функция будет функцией от корней x, инвариантной относительно всякой подстановки вида $(x_{k.l,\ ak+b.cl+d})$. Стало быть, эта функция известна. Следовательно, можно только что указанным мной методом найти значения y_0, y_1, y_2, ..

и вследствие этого разложить заданное уравнение на множители, из которых один имеет корнями $x_{0.0}$, $x_{0.1}$, $x_{0.2}$, ...

Мы бы нашли также множитель того же уравнения, корни которого будут $x_{0.0}$, $x_{1.0}$, $x_{2.0}$, ... Следовательно, можно, находя общий наибольший делитель этих двух множителей, получить $x_{0.0}$, который является одним из искомых решений. То же имеет место и для других корней.

P

ЗАМЕТКА I
ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

[Изложение метода Лагранжа для решения при помощи квадратур неоднородного линейного уравнения, если известно решение однородного.]

Q

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

[Вывод инвариантов этих поверхностей при преобразованиях косоугольных координат.]

Н. Г. ЧЕБОТАРЕВ.

ПРИМЕЧАНИЯ К СОЧИНЕНИЯМ ГАЛУА

[1] (*стр. 9, 22*).

Метод Лагранжа решения численных уравнений состоит в следующем. Чтобы найти корень уравнения $f(x) = 0$, лежащий между последовательными целыми числами a и $a+1$, делают в $f(x) = 0$ подстановку $x = a + \frac{1}{y}$. Получаемое уравнение $f_1(y) = 0$ имеет по крайней мере один корень, больший единицы. Делая в $f_1(y) = 0$ аналогичную подстановку и продолжая этот процесс, мы получаем искомый корень в виде разложения в непрерывную дробь. Лагранж предложил также прием, ускоряющий получение звеньев этой непрерывной дроби. См., например, J. A. Serret, Cours d'algèbre supérieure, т. I.

[2] (*стр. 26*).

Эта теорема в более точной формулировке носит название теоремы Коши. Именно, у Коши функция $\varphi(x)$ дается в виде $\frac{F'(x)}{f'(x)}$, где $F'(x)$ и соответственно $f'(x)$ — производные функций $F(x)$, $f(x)$, так что формула Коши имеет вид

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{f(x+h)-f(x)} = \frac{F'(k)}{f'(k)} \qquad (x \leqslant k \leqslant x+h).$$

[3] (*стр. 30*).

Этот результат оказался верным только в случае $\nu = 1$.

[4] (*стр. 30*).

Чтобы получить уравнение, которому удовлетворяют эллиптические функции от $\frac{u}{n}$, например $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$, если известны $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, надо, пользуясь формулами сложения

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - \varkappa^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

составить выражения для $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ через $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{cn}\frac{u}{n}$, $\operatorname{dn}\frac{u}{n}$. Из них легко получается уравнение для $\operatorname{sn}\frac{u}{n}$. Если через 4ω, $4\omega'$ обозначить периоды функций, то корнями полученного уравнения будут все величины

$$\operatorname{sn}\frac{u + 4k\omega + 4k'\omega'}{n} \qquad (k, k' = 0, 1, \ldots, n-1),$$

числом n^2. Группа Галуа этого уравнения абелева порядка n^2 и является прямым произведением двух циклических групп порядка n, если считать величины $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\varkappa^2$ включенными в область рациональности [подробнее об этом см., например, у Вебера (H. W e b e r, Lehrbuch der Algebra, т. 3, Брауншвейг 1908)].

[5] (*стр. 37*).

Речь идет о доказательстве Гаусса существования первообразных корней сравнения $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Для данного случая доказательство строится так. Будем говорить,

что корень α уравнения $x^n - 1 = 0$ $(n = p^\nu - 1)$ принадлежит к показателю d, если имеет место $\alpha^d = 1$, но не имеет места $\alpha^{d_1} = 1$ ни при каком $d_1 < d$. Легко убедиться, что d есть делитель n. Если α принадлежит к d, то всякая степень α^k, где k взаимно простое с d, тоже принадлежит к d. Таким образом если существует хотя бы одна величина α, принадлежащая к показателю d, то их будет $\varphi(d)$, где $\varphi(m)$ — функция Эйлера, выражающая число целых положительных чисел, взаимно простых с m и не превышающих m. С другой стороны, другие величины кроме α не могут принадлежать к показателю d, так как в противном случае уравнение $x^d - 1 = 0$ имело бы более, чем d, корней, что невозможно. Таким образом, обозначая через $\psi(d)$ число корней уравнения $x^n - 1 = 0$, принадлежащих к показателю d, мы получим одно из двух:

$$\psi(d) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(d) = \varphi(d),$$

т. е. во всяком случае

$$\psi(d) \leqslant \varphi(d).$$

Но так как всякий из n корней уравнения $x^n - 1 = 0$ принадлежит к какому-нибудь показателю, являющемуся делителем числа n, то, обозначая через $1, d_1, d_2, \ldots, d_{s-1}, n$ полную систему делителей числа n, мы придем к формуле

$$\psi(1) + \psi(d_1) + \psi(d_2) + \ldots + \psi(d_{s-1}) + \psi(n) = n.$$

С другой стороны, для функции $\varphi(m)$ имеет место формула

$$\varphi(1) + \varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_{s-1}) + \varphi(n) = n.$$

Вычитая эти формулы одну из другой, получим

$$[\varphi(1) - \psi(1)] + [\varphi(d_1) - \psi(d_1)] + \ldots + [\varphi(n) - \psi(n)] = 0.$$

Но сумма неотрицательных величин равна нулю только в том случае, если каждое слагаемое равно нулю. В частности,

$$\psi(n) = \varphi(n) > 0,$$

ч. и тр. д.

[6] (*стр. 39*).

А. М. Островский в статье «К алгебре конечных полей» (Протоколы Киевского физ.-мат. об-ва, 1913) указывает на возможность получения решения уравнений в конечном поле в радикалах при помощи разложения величин конечного поля в p-адические ряды. Сущность этого метода заключается в том, что уравнение

$$x^2 + x + 1 = 0$$

рассматривается как сравнение по простому модулю:

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod 2.$$

Для разложения его левой части на квадраты (т. е. вывода радикальной формулы) надо умножить сравнение на четыре:

$$4x^2 + 4x + 4 \equiv (2x + 1)^2 + 3 \equiv 0 \pmod 8,$$

откуда следует

$$x \equiv \frac{-4 \pm \beta}{2} \pmod 4,$$

где β — корень неприводимого сравнения

$$y^2 + 3 \equiv 0 \pmod 8.$$

[7] (*стр. 46*).

Согласно исследованиям Камилла Жордана, бóльшая часть которых опубликована в его классической книге «Traité des substitutions», Paris 1870, вопрос о типах разрешимых групп (и уравнений) степени p^ν оказался гораздо сложнее, чем это представлял себе Галуа. В противоположность случаю $\nu = 1$ оказалось, что симметрическая группа степени p^ν ($\nu > 1$) не содержит такой максимальной разрешимой группы, чтобы всякая разрешимая группа степени p^ν была изоморфна с каким-нибудь делителем этой максимальной группы. Здесь в каждом случае можно выделить несколько различных типов максимальных групп, каждая из которых

не является подгруппой другой разрешимой группы той же степени, причем всякая разрешимая группа степени p^ν изоморфна с подгруппой одной из этих групп максимального типа. Вопрос о нахождении всех максимальных типов служит главным предметом исследования в упомянутой книге Жордана и, несмотря на громадный труд, вложенный Жорданом, нельзя считать, что этот вопрос получил удовлетворительное разрешение. При $\nu = 2$ оказалось, что существует три различных максимальных типа разрешимых групп (см. О. Ю. Шмидт, Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа, Киевские унив. изв., 1913).

[8] (*стр. 47*).

Изложенное в примечании [7] убеждает нас в несуществовании в общем случае такой функции от корней, рациональность значения которой была бы необходима и достаточна для разрешимости уравнения в радикалах. В самом деле, такая функция существует тогда и только тогда, если все разрешимые группы степени p^ν имеют только один максимальный тип. В общем же случае можно изменить постановку проблемы так: требуется найти систему нескольких рациональных функций от корней (число их равно числу различных разрешимых максимальных типов групп степени p^ν) такого рода, чтобы уравнение разрешалось в радикалах тогда и только тогда, если хоть одна из этих функций имеет рациональное значение. В этом виде проблема всегда имеет решение.

В случае $\nu = 1$ имеет решение проблема в первоначальной формулировке, так как для уравнений простой степени единственным разрешимым максимальным типом является группа всех линейных преобразований по модулю p. Ее порядок равен $p(p-1)$, а потому принадлежащая к ней функция от корней (т. е. не изменяющаяся от всех ее под-

становок и изменяющаяся от всех других подстановок) является корнем уравнения степени

$$\frac{p!}{p\,(p-1)} = 1 \cdot 2 \cdots (p-2) = (p-2)!,$$

коэфициенты которого рационально выражаются через коэфициенты заданного уравнения.

Кэли (Cayley) построил такое уравнение для случая $p = 5$. (См. Д. А. Граве, Основы высшей алгебры, Киев 1914).

[9] (*стр. 49*).

Предлагаемое здесь Галуа разложение перестановок на группы по существу совпадает с принятым в современной теории групп разложением группы на *смежные классы* (или *сопряженные системы*) по подгруппе. Галуа придает слову «группа» значение совокупности перестановок. Сопоставляя каждой перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

т. е. операцию, переводящую 1 в α_1, 2 в α_2, ..., n в α_n, мы перейдем к совокупности подстановок. В настоящее время принято, подобно тому, как это делает Галуа для перестановок, называть совокупность подстановок их суммой и пользоваться знаком $+$. Но группой подстановок теперь называют только такую их совокупность, что произведение двух подстановок совокупности тоже входит в совокупность. Если даны группа G и ее подгруппа H (т. е. часть подстановок группы, тоже образующая группу), то можно найти такие подстановки $S, S', \ldots$, что совокупности $H, HS, HS', \ldots$ не будут попарно содержать общих элементов. (Эти совокупности носят название смежных классов: они кроме первой не составляют групп в современном смысле этого слова; но Галуа называет соответствующие им системы

перестановок группами.) Далее, все подстановки всех смежных классов этого рода исчерпывают всю группу (теорема Лагранжа):

$$G = H + HS + HS' + \ldots$$

Подобное же разложение имеет место для смежных классов, получаемых при умножении группы H слева:

$$G = H + TH + T'H + \ldots$$

Оба типа смежных классов попарно совпадают в том и только в том случае, если H есть *нормальный делитель* группы G, т. е. если для всякой подстановки S из G имеет место $HS = SH$, или $S^{-1}HS = H$. Этому случаю как раз соответствует то, что Галуа называет *собственным разложением*.

[10] (*стр. 50*).

Число M групп перестановок, или по современной терминологии число смежных классов, равно степени неприводимого уравнения, которому удовлетворяет функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от корней, принадлежащая к подгруппе H. В самом деле, все подстановки, входящие в один и тот же смежный класс, переводят φ в одну и ту же функцию, а потому при производстве всевозможных подстановок группы G функция φ приобретает всего M значений (сопряженных с φ). Коэфициенты уравнения, корнями которого являются эти M значений, будучи симметрическими функциями от этих последних, не изменяются от подстановок группы G, если их рассматривать, как функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а потому рационально выражаются через коэфициенты первоначального уравнения.

Для возможности дальнейшего понижения степени уравнения важна, однако, не столько его степень, сколько его группа. Чтобы определить ее, нужно посмотреть, какие подстановки над функциями, сопряженными с φ, вызывает производство над $x_1, x_2, \ldots, x_n$ всех подстановок группы G.

Их может быть меньше, чем в G, только благодаря тому, что некоторые из подстановок группы G будут вызывать среди функций, сопряженных с G, одинаковые подстановки. В этом случае в G будут существовать не тождественные подстановки, оставляющие функции, сопряженные с φ, на месте. Эти подстановки составляют нормальный делитель группы G, т. е. по терминологии Галуа дают начало собственному разложению. Это условие является необходимым для возможности понижения группы уравнения.

Наиболее благоприятным случаем является тот, когда группа H есть нормальный делитель группы G. Так как функция, получающаяся из φ при помощи подстановки S, принадлежит к подгруппе $S^{-1}HS$, и так как в силу нормальности H все группы $S^{-1}HS$ совпадают с H, то все подстановки группы H будут оставлять на месте все функции, сопряженные с φ. Поэтому если группа G содержит NM подстановок, а группа H содержит N подстановок, то уравнение, которому удовлетворяет φ, будет иметь своей группой группу из M подстановок. Эта группа вполне определяется группой G и ее нормальным делителем H и носит название *дополнительной группы* (или *факторгруппы*) G/H.

[11] *(стр. 50).*

Если группа содержит простое число подстановок, то она есть циклическая группа, т. е. все ее подстановки являются степенями одной из подстановок: $S, S^2, \ldots, S^p$. Если группа уравнения есть циклическая группа, то, как показал еще Лагранж, уравнение решается в радикалах. В самом деле, пусть корень x_1 циклического уравнения переводится подстановками $S, S^2, S^3, \ldots$ соответственно в $x_2, x_3, \ldots$. Тогда, обозначая через α какой-нибудь корень n-й степени из единицы, где n — степень уравнения, мы убедимся, что величина $(x, \alpha) = x_1 + x_2\alpha + x_3\alpha^2 + \ldots + x_n\alpha^{n-1}$ подстановкой S переведется в $\alpha^{-1}(x, \alpha)$. Таким образом ее

n-я степень, $(x, \alpha)^n$, остается неизменной при производстве над ней подстановок группы уравнения, а потому рационально выражается через α: $(x, \alpha)^n = \varphi(\alpha)$. Заставляя α пробегать все n-е корни из единицы, мы получим n линейных выражений от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выраженными в радикалах: $(x, \alpha) = \sqrt[n]{\varphi(\alpha)}$, откуда нетрудно получить искомое радикальное выражение корней:

$$nx_1 = \sqrt[n]{\varphi(\alpha)} + \sqrt[n]{\varphi(\alpha')} + \sqrt[n]{\varphi(\alpha'')} + \ldots$$

Корни из единицы тоже приводятся к корням циклических уравнений и потому тоже могут быть выражены в радикалах. Таким образом, если группа уравнения такова, что ее можно разбить на дополнительные группы, состоящие из простого числа подстановок, то последовательно решая каждое из соответствующих им уравнений, мы получим радикальные выражения для корней первоначального уравнения.

Имеет место также обратная теорема.

[12] *(стр. 50).*

Это — знакопеременная группа пятой степени, т. е. группа всех четных подстановок пяти букв. В связи с этим уравнение пятой степени есть уравнение наименьшей степени, которое не может быть решено в радикалах.

[13] *(стр. 50).*

Галуа говорит здесь о способе, предложенном Гауссом для решения уравнений деления круга, т. е. уравнений, корнями которых являются корни из единицы. Гаусс рассматривает уравнение $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$, где p — простое число. Группа этого уравнения циклическая. Пусть она состоит из подстановок $S, S^2, \ldots, S^{p-1}, S^p$. Обозначая через ε один из корней нашего уравнения, а через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ те корни, в которые переходит ε посредством

подстановок S, $S^2, \ldots, S^{p-1}$, Гаусс называет f-членным периодом выражение

$$\eta = \varepsilon + \varepsilon_e + \varepsilon_{2e} + \ldots + \varepsilon_{(f-1)e},$$

где $p - 1 = ef$ будет любое разложение числа $p - 1$ на два множителя. Очевидно, что η не меняется от подстановок подгруппы S^e, $S^{2e}, \ldots, S^{fe}$, состоящей из f подстановок, а потому она удовлетворяет уравнению e-й степени. С другой стороны, величина ε удовлетворяет уравнению f-й степени, коэфициенты которого рационально выражаются через η.

Упоминая о способе Гаусса, Галуа хочет особо отметить тот случай, когда решение уравнения степени MN может быть приведено к решению уравнений степеней M и N.

[14] (*стр. 52*).

Это утверждение оказалось неверным. См. цитированную книгу Жордана или статью Шмидта.

[15] (*стр. 53*).

Обозначая через $4K$ и $4iK'$ периоды эллиптической функции $\operatorname{sn} u$ и вводя обозначения

$$x_{\mu,\mu'} = \operatorname{sn}\left(\frac{4\mu K + 4\mu i K'}{n}\right),$$

мы убедимся, что n^2 величин $x_{\mu,\mu'}$ суть корни уравнения

$$xA(x^2) = 0,$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ суть полиномы, входящие в выражения

$$\operatorname{sn} nv = \frac{\operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot A(\operatorname{sn}^2 v)}{D(\operatorname{sn}^2 v)}, \quad \operatorname{cn} nv = \frac{B(\operatorname{sn}^2 v)}{D(\operatorname{sn}^2 v)},$$

$$\operatorname{dn} nv = \frac{C(\operatorname{sn}^2 v)}{D(\operatorname{sn}^2 v)}$$

при четном n и

$$\operatorname{sn} nv = \frac{\operatorname{sn} v \cdot A(\operatorname{sn}^2 v)}{D(\operatorname{sn}^2 v)}, \quad \operatorname{cn} nv = \frac{\operatorname{cn} v \cdot B(\operatorname{sn}^2 v)}{D(\operatorname{cn}^2 v)},$$

$$\operatorname{dn} nv = \frac{\operatorname{dn} v \cdot C(\operatorname{sn}^2 v)}{D(\operatorname{sn}^2 v)}$$

при нечетном n.

Пользуясь теоремой сложения эллиптических функций (см. примечание [4]), нетрудно получить для полиномов A_n, B_n, C_n, D_n следующие рекуррентные формулы:

$$A_{2n} = 2A_nB_nC_nD_n,$$

$$B_{2n} = B_n^2D_n^2 - x^2y^2z^2A_n^2C_n^2 \quad \text{при } n \text{ четном},$$

$$= y^2B_n^2D_n^2 - x^2z^2A_n^2C_n^2 \quad \text{при } n \text{ нечетном},$$

$$C_{2n} = C_n^2D_n^2 - \varkappa^2x^2y^2z^2A_n^2B_n^2 \quad \text{при } n \text{ четном},$$

$$= z^2C_n^2D_n^2 - \varkappa^2x^2y^2A_n^2B_n^2 \quad \text{при } n \text{ нечетном},$$

$$D_{2n} = D_n^4 - \varkappa^2x^4y^4z^4A_n^4 \quad \text{при } n \text{ четном},$$

$$= D_n^4 - \varkappa^2x^4A_n^4 \quad \text{при } n \text{ нечетном},$$

а также

$$A_{2n+1} = y^2z^2A_nD_nB_{n+1}C_{n+1} + A_{n+1}D_{n+1}C_nB_n \quad \text{при } n \text{ четном},$$

$$= A_nD_nB_{n+1}C_{n+1} + y^2z^2A_{n+1}D_{n+1}C_nB_n \quad \text{при } n \text{ нечетном},$$

$$B_{2n+1} = B_nB_{n+1}D_nD_{n+1} - \varkappa^2z^2A_nA_{n+1}C_nC_{n+1},$$

$$C_{2n+1} = C_nC_{n+1}D_nD_{n+1} - \varkappa^2x^2y^2A_nA_{n+1}B_nB_{n+1},$$

$$D_{2n+1} = D_n^2D_{n+1}^2 - \varkappa^2x^4y^2z^2A_n^2A_{n+1}^2,$$

где $y^2 = 1 - x^2$, $z^2 = 1 - \varkappa^2x^2$. Эти формулы наряду со следующими:

$$A_2 = 2, \; B_2 = 1 - 2x^2 + \varkappa^2x^4,$$

$$C_2 = 1 - 2\varkappa^2x^2 + \varkappa^2x^4, \; D_2 = 1 - \varkappa^2x^4$$

позволяют определять полиномы A_n, B_n, C_n, D_n для каждого значения n.

Уравнение $A_n(x^2) = 0$ распадается на неприводимые множители (считая областью рациональности совокупность рациональночисленных рациональных функций от $\varkappa$), корнями которых являются те $x_{\mu,\mu'}$, для которых числа μ, μ', n имеют один и тот же общий наибольший делитель. В частности, если μ, μ', n взаимно простые, то соответствующий неприводимый множитель имеет степень $\varphi(n)\cdot\psi(n)$, где

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right), \quad \psi(n) = n\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

(p — простые множители n). Группу Галуа этого множителя можно представить как совокупность подстановок, переводящих значки μ, μ' каждого корня в $a\mu + b\mu'$, $c\mu + d\mu'$, где определитель $ad - bc$ должен быть взаимно простым с n. При этом к числам a, b, c, d мы имеем право прибавлять любые кратные числа n. Порядок этой группы равен

$$\nu = n\varphi(n)\psi(n).$$

В частности, если $n = p$, где p — простое число, степень получаемого уравнения равна $p^2 - 1$, а порядок его группы Галуа равен $p(p^2 - 1)$.

Если объединить корни $x_{\mu,\mu'}$ в системы

$$x_{\mu,\mu'}, \quad x_{h\mu,h\mu'}, \quad x_{h'\mu,h'\mu'}, \ldots,$$

где $1, h, h', \ldots$ пробегают $\varphi(n)$ чисел, взаимно простых с n и не превышающих n, то симметрическая функция от корней одной системы является корнем уравнения преобразования, степень которого равна $\psi(n)$, а группа Галуа изоморфна с совокупностью дробных линейных подстановок одной переменной, рассматриваемых по модулю n, определитель которых взаимно прост с n.

[16] (*стр. 53*).

Описанная выше группа дробных линейных подстановок содержит в случае $n = p$ подгруппу (нормальный делитель) индекса 2, подстановки которой имеют определителем квадратичный вычет по модулю p. Группа Галуа приводится к этой подгруппе, если к области рациональности присоединить p-й корень из единицы. Это понижение происходит благодаря существующим между корнями так называемым соотношениям Абеля:

$$\sum_{\nu} e^{\frac{8m\nu\pi i}{n}} x_{\nu,\nu'} = 0, \quad \text{если} \quad m \not\equiv \nu' \pmod{n};$$

$$\sum_{\nu} e^{\frac{8m\nu\pi i}{n}} x_{\nu,\nu'} \neq 0, \quad \text{если} \quad m \equiv \nu' \pmod{n}.$$

В самом деле, эти соотношения нарушаются, если подвергнуть значки подстановке $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, для которой $\alpha\delta - \beta\gamma$ не $\equiv 1 \pmod{n}$. См. W e b e r, loc. cit., стр. 205—216.

[17] (*стр. 53*).

Эта теорема, доказательство которой у Галуа отсутствует, может быть формулирована так:

Группа G подстановок $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ по простому модулю p, где $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{p}$, — простая, т. е. не содержит отличных от самой себя и единичной группы нормальных делителей, если $p > 3$. Здесь подстановки $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-\alpha, & -\beta\\ -\gamma, & -\delta\end{pmatrix}$ не считаются различными. При доказательстве следует исходить из того, что всякую подстановку этой группы можно представить как произведение степеней различным образом повторяемых специальных подстановок

$$A = \begin{pmatrix}1, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix}.$$

Из этого следует, что всякая группа, содержащая подстановки A и B, целиком содержит исходную группу.

Чтобы доказать простоту этой группы, возьмем ее произвольный нормальный делитель K и покажем, что он содержит обе подстановки A, B. Пусть K содержит подстановку $U = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$. Тогда в силу нормальности K будет также содержать подстановки $X^{-1}UX$, где X—любая подстановка группы G.

Будем называть характеристическим сравнением сравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha - z & \beta \\ \gamma & \delta - z \end{vmatrix} = z^2 - (\alpha + \delta) z + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Оно имеет или не имеет рациональные корни в зависимости от того, является ли число $\Delta = (\alpha + \delta)^2 - 4$ квадратичным вычетом или невычетом по модулю p. Если же $(\alpha + \delta)^2 - 4 \equiv 0 \pmod{p}$, то сравнение имеет один кратный корень.

Возьмем $X = \begin{pmatrix} 1, & \xi \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, где ξ находится в нашем распоряжении. В K содержится также подстановка

$$V = X^{-1}UXU^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma^2\xi^2 - \alpha\gamma\xi + 1, & -\alpha\gamma\xi^2 + (\alpha^2 - 1)\xi \\ -\gamma^2\xi, & \alpha\gamma\xi + 1 \end{pmatrix}.$$

Для нее $\Delta \equiv \gamma^2\xi^2(\gamma^2\xi^2 + 4)$. Подберем ξ так, чтобы Δ был или вычетом, или делился на p. Рассмотрим отдельно два случая:

1. $p = 4k + 1$. Если $\gamma = 0$, откуда $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{p}$, то, исключая случай $\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1 \pmod{p}$, соответствующий или тождественной подстановке U, или случаю $U = \begin{pmatrix} 1, & \beta \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ (приведение к этому случаю наша ближайшая задача), мы получим $V = \begin{pmatrix} 1, & (\alpha^2 - 1)\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, что опять приводит нас к ближайшей цели в силу $(\alpha^2 - 1)\xi \not\equiv 0 \pmod{p}$. При $\gamma \not\equiv 0 \pmod{p}$ сравнение

$$\Delta = \gamma^2\xi^2(\gamma^2\xi^2 + 4) \equiv 0 \pmod{p}$$

имеет решение $\xi \not\equiv 0 \pmod{p}$, так как -4 есть вычет. Таким образом в K содержится подстановка $V = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1 \end{pmatrix}$, у которой характеристическое сравнение имеет кратный корень. Тогда можно подобрать в G подстановку $X = \begin{pmatrix} x, & y \\ z, & u \end{pmatrix}$ так, чтобы $X^{-1}VX$ была вида $\begin{pmatrix} 1, & \xi \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$. Для этого нужно удовлетворить системе сравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 z \equiv x,\ \alpha_1 y + \beta_1 u \equiv x\xi + y, \\ \gamma_1 x + \delta_1 z \equiv z,\ \gamma_1 y + \delta_1 u \equiv z\xi + u \end{aligned}\right\} \pmod{p},$$

приводящихся в силу $\alpha_1 + \delta_1 = 2$, $\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = 1$ к следующим:

$$(\alpha_1 - 1)x + \beta_1 z \equiv 0,\quad x\xi \equiv (\alpha_1 - 1)y + \beta_1 u \pmod{p}.$$

При $\beta_1 = 0$ мы имеем сразу подстановку $V = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \xi, & 1 \end{pmatrix}$ типа, приводящегося к искомому. При $\beta_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ мы находим x, z, удовлетворяющие первому из сравнений, а затем y, u из сравнения $xu - yz \equiv 1 \pmod{p}$. Комбинируя эти сравнения, получаем

$$x^2\xi \equiv \beta_1 \pmod{p},$$

откуда следует $\xi \not\equiv 0 \pmod{p}$. Наша цель достигнута.

2. $p = 4k + 3$. В этом случае можно подобрать ξ так, чтобы $\Delta = \gamma^2\xi^2(\gamma^2\xi^2 + 4)$ было вычетом. В самом деле, рассмотрим последовательность

$$4, 8, 12, \ldots, 4(p - 1).$$

Среди $p - 2$ пар $< 4s, 4s + 4 >$ пусть будет R пар из вычетов, R' из вычета и невычета, N — из невычета и

вычета и N' — из невычетов. Первое число последовательности — вычет, последнее — невычет. Из этого и того, что всего имеется $\frac{p-1}{2}$ вычетов, следует:

$$R+R'=\frac{p-1}{2}, \quad N+N'=p-2-\frac{p-1}{2}=\frac{p-3}{2},$$

$$R'+N'=\frac{p-1}{2}, \quad R+N=p-2-\frac{p-1}{2}=\frac{p-3}{2}.$$

Далее, если $4s$ — невычет, то $4t$, где $st\equiv 1 \pmod p$, — тоже невычет. Тогда если $4s+4$ — вычет, то $4t+4\equiv \frac{4+4s}{s} \pmod p$ есть невычет, и обратно. Таким образом паре $<4s, 4s+4>$ из невычетов соответствует вполне определенная пара $<4t, 4t+4>$ из невычета и вычета, и обратно.

Случай, когда $s\equiv t\equiv -1 \pmod p$, дает $4s+4\equiv 0 \pmod p$, а потому не соответствует ни одной из рассматриваемых пар. Поэтому

$$N=N',$$

откуда

$$N=N'=R=\frac{p-3}{4}, \quad R'=\frac{p+1}{4}.$$

Эти равенства показывают, что при $p>3$ существует пара $<4s, 4s+4>$ из вычетов (теорема Лагранжа).

Решая сравнение

$$\gamma^2\xi^2\equiv 4s \pmod p,$$

мы убедимся, что $\Delta=\gamma^2\xi^2(\gamma^2\xi^2+4)$ есть также вычет, и в группе K содержится подстановка $V=\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}$, у которой характеристическое сравнение имеет рациональные корни.

В K также содержится подстановка $W=X^{-1}VX$, где мы возьмем $X=\begin{pmatrix}1, & 0\\ \xi, & 0\end{pmatrix}$ и ξ подберем так, чтобы W имела вид $\begin{pmatrix}\alpha_2, & \beta_2\\ 0, & \delta_2\end{pmatrix}$.

Для этого ξ должно удовлетворять сравнению

$$\beta_1\xi^2+(\alpha_1-\delta_1)\xi-\gamma_1\equiv 0 \pmod p,$$

которое имеет рациональные корни, так как

$$\Delta\equiv(\alpha_1-\delta_1)^2+4\beta_1\gamma_1\equiv(\alpha_1+\delta_1)^2-4 \pmod p$$

есть по условию вычет. При этом можно считать, что $\beta_2\not\equiv 0 \pmod p$, так как в противном случае берем

$$X=\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix},$$

и тогда

$$X^{-1}WX=\begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2, & 0\\ 0, & \delta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_2, & \alpha_2-\delta_2\\ 0, & \delta_2\end{pmatrix}.$$

Здесь $\alpha_2-\delta_2\equiv 0 \pmod p$ только при $\alpha_2\equiv\delta_2\equiv\pm 1 \pmod p$, т. е. когда W — тождественная подстановка.

Итак, пусть

$$W=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ 0, & \delta\end{pmatrix}, \quad \alpha\delta\equiv 1 \pmod p, \quad \beta\not\equiv 0 \pmod p.$$

Возьмем

$$X=\begin{pmatrix}0, & \xi\\ -\eta, & 0\end{pmatrix}, \quad \xi\eta\equiv 1 \pmod p.$$

Тогда в K содержится подстановка

$$WX^{-1}WX=\begin{pmatrix}1-\eta^2\beta^2, & \alpha\beta\\ -\eta^2\beta\delta, & 1\end{pmatrix}.$$

Подберем η так, чтобы сумма диагональных элементов равнялась -2 (тогда подстановка будет иметь кратный корень). Для этого надо удовлетворить сравнению

$$\eta^2\beta^2\equiv 4 \pmod p,$$

что всегда возможно. Поэтому, рассуждая подобно предыдущему, найдем в K подстановку вида $\begin{pmatrix} 1, & \xi \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, $\xi \not\equiv 0 \pmod p$.

Итак, во всех случаях мы можем найти в K подстановку $W = \begin{pmatrix} 1, & \xi \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$. Подстановка W^η, где η определяется из сравнения $\xi\eta \equiv 1 \pmod p$, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Беря $X = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$, находим в K подстановку

$$T = X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix},$$

а также подстановку

$$AT = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = B,$$

и теорема доказана.

В случаях $p = 2$ и $p = 3$ теорема несправедлива. Именно, при $p = 2$ группа G содержит нормальный делитель

$$K = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix},$$

а при $p = 3$ — нормальный делитель

$$K = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}.$$

[18] (*стр. 54*).

По современной терминологии ставится вопрос о существовании делителя (нормального или нет) индекса p.

[19] (*стр. 55*).

Эта теорема, решающая вопрос, упомянутый в примечании [18], не может быть здесь доказана в силу своей сложности. Доказательство ее дано, например, в книге H. W e b e r, Lehrbuch der Algebra, т. 2, стр. 335—343, Брауншвейг 1899. Идея доказательства основана на том, что подгруппа индекса p имеет порядок $\frac{p^2-1}{2}$, взаимно простой с p, и потому порядки ее подстановок взаимно простые с p. Такие подстановки не могут иметь кратных корней. В самом деле, в примечании [17] мы убедились, что подстановки с кратным корнем могут быть преобразованы к виду $\begin{pmatrix} 1, & \xi \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ и поэтому имеют порядок p. Поэтому каждую из подстановок этой подгруппы можно преобразованием (иррациональным) привести к виду $\begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, где ε — корень из единицы. Можно также показать, что все подстановки группы можно нормировать так, чтобы все соотношения между ними имели место не по модулю p, а в виде точных равенств. Таким образом вопрос приводится к разысканию всевозможных типов конечных групп матриц второго порядка. Известно, что такие группы изоморфны с группами вращений сферы. Конечные группы последнего типа суть группы вращений правильных многогранников, не считая циклических групп и так называемых групп двойной пирамиды, которые не могут быть подгруппами простого индекса простых групп. Эти группы суть:

1) *группа тетраэдра* порядка 12; простое число p определяется из равенства $12 = \frac{p^2-1}{2}$, откуда $p = 5$;

2) *группа октаэдра* порядка 24; из $\frac{p^2-1}{2} = 24$ получаем $p = 7$;

3) *группа икосаэдра* порядка 60; из $\frac{p^2-1}{2} = 60$ получаем $p = 11$.

[20] (*стр. 55*).

Дальнейшая часть письма посвящена абелевым интегралам, т. е. интегралам от алгебраических функций самого

общего вида, и представляет самое удивительное в истории математики явление. Приведем здесь мнение Э. Пикара (É. Picard), автора предисловия к французскому изданию сочинений Галуа:

«Мы не знаем исследований, о которых он говорит в этом письме; в некоторых утверждениях Галуа несколько пунктов остаются темными; однако относительно некоторых результатов, к которым он пришел в теории интегралов от алгебраических функций, можно составить себе точное представление. Создается убеждение, что он владел наиболее существенными из результатов по теории абелевых интегралов, которые получил Риман 25 лет спустя. Мы не можем без удивления видеть, что Галуа говорит о периодах абелева интеграла относительно произвольной алгебраической функции; для ультраэллиптических интегралов мы без затруднения понимаем, что он разумеет под периодом; но другое дело для общего случая; мы почти принуждены предположить, что Галуа по меньшей мере предчувствовал некоторые понятия, относящиеся к функциям комплексной переменной, которые были развиты только через несколько лет после его смерти. Утверждения точны; гениальный (illustre) автор производит классификацию абелевых интегралов на три рода и утверждает, что если n обозначает число линейно независимых интегралов первого рода, то число периодов равно $2n$. Теорема относительно перестановки параметра и аргумента в интегралах третьего рода правильно формулирована, точно так же как и соотношения между периодами абелевых интегралов; Галуа говорит также об обобщении классического соотношения Лежандра, где фигурируют периоды эллиптических итегралов, обобщении, которое, вероятно, привело его к важным соотношениям, открытым впоследствии Вейерштрассом и Фуксом». [21] (*стр. 55*).

В этом утверждении, формулированном весьма неясно, речь идет, повидимому, о теореме Абеля, доказанной в его

большом мемуаре «Mémoire sur une propriété génerale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes» (Oeuvres complètes, 2-е издание, т. I, стр. 145—211, Христиания 1881), представленном в Парижскую академию в 1829 г., но опубликованном ею лишь в 1841 г. Мы сомневаемся, чтобы Галуа имел доступ к рукописям Парижской академии, так как его собственный большой мемуар постигла еще худшая судьба: он был затерян в архивах Парижской академии. Можно предполагать, что Галуа была известна заметка Абеля «Démonstration d'une propriété génerale d'une certaine classe de fonctions transcendantes» (loc. cit., стр. 515—517), опубликованная в четвертом томе журнала Крелля (1829). Однако намек на эту формулировку теоремы Абеля мы встречаем только в большом мемуаре Абеля (loc. cit., стр. 146):

«Если имеется несколько функций, производные которых суть корни одного и того же алгебраического уравнения, все коэфициенты которого суть рациональные функции от одной переменной, то всегда можно выразить сумму произвольного числа подобных функций через алгебраическую и логарифмическую функции, если только между аргументами рассматриваемых функций установить известное число алгебраических соотношений.

Число этих соотношений нисколько не зависит от числа функций, а только от внутренней природы рассматриваемых функций. Так, например, для эллиптической функции [по современной терминологии — для эллиптического интеграла] это число есть единица; для функции, производная которой не содержит других иррациональностей кроме радикала второй степени, под которым переменная входит не выше чем в пятой или шестой степени, необходимое число соотношений есть два и т. д.».

Возвращаясь к формулировке Галуа, попытаемся реставрировать ее в следующем виде. Пусть $F(x)$ — абелев интеграл, т. е. функция, производная от которой есть

алгебраическая функция от x. Тогда сумма m функций

$$F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_m),$$

может быть представлена в виде

$$-F(x_{m+1}) - F(x_{m+2}) - \ldots - F(x_{m+n}) + \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где Φ — алгебраически-логарифмическая функция, а переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n}$ подобраны так, чтобы существовала рациональная функция от корня того же алгебраического уравнения и от x, имеющая нулями только

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}.$$

Число n Галуа было введено и Абелем в цитированном мемуаре, где оно обозначено через γ, причем указан способ его вычисления [стр. 168, формула (62)]. Однако Абель не указывает, что это число равно половине числа независимых периодов абелева интеграла, как это делает Галуа. В настоящее время это число называется Geschlecht (род) (по Риману) или Rang (ранг) (по Вейерштрассу), обозначается буквой p (у Вейерштрасса ϱ) и играет фундаментальную роль в теории алгебраических функций.

[22] *(стр. 55).*

Это определение ранга, как половины числа независимых периодов, заставляет нас подозревать, что Галуа не была чужда современная концепция многозначной функции, основанная на понятии римановой поверхности или какого-нибудь ее суррогата. Число $2n$ равно мере связности замкнутой римановой поверхности, т. е. наибольшему числу разрезов, которые можно на ней сделать, не нарушая ее связности. Периоды равны определенным интегралам, взятым по этим разрезам.

[23] (*стр. 55*).

Повидимому, это не совсем ясное определение «функций первого рода» совпадает с современным понятием

интеграла первого рода, т. е. функции, остающейся конечной во всех точках римановой поверхности. Можно предположить, что Галуа определял функцию первого рода как такой интеграл, что соответствующая ему алгебраически-логарифмическая часть в теореме Абеля равна нулю. Тогда это определение будет не совсем верно, так как известны такие исключительные случаи, где эта часть равна нулю и для некоторых интегралов третьего рода. Правильное же указание числа линейно независимых интегралов первого рода является поистине гениальным предвидением Галуа.

[24] *стр . 56.*

Точно так же «функции второго рода» суть современные интегралы второго рода, т. е. интегралы, имеющие только алгебраические бесконечности, или полюсы. Здесь опять Галуа правильно указал число линейно независимых интегралов, не сводящихся к алгебраическим функциям и к интегралам первого рода.

[25] (*стр. 56*).

Это — формулировка знаменитой теоремы о *перестановке параметра и аргумента* в интегралах третьего рода. Более того, элементарный интеграл третьего рода можно, прибавляя к нему линейную комбинацию интегралов первого рода, нормировать так, чтобы имело место просто равенство

$$\Pi(x, a) = \Pi(a, x),$$

откуда может быть сразу выведено утверждение Галуа.

[26] (*стр. 56*).

Если $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n$ основные обходы на римановой поверхности; если интегралы первого рода $u_1, u_2, \ldots, u_n$ нормированы так, что период u_i вдоль a_i равен $2\pi i$, а вдоль $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ равен

нулю; если периоды интеграла третьего рода $\Pi(x, a)$ вдоль $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю, а вдоль $b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны соответственно $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, — то имеет место формула

$$\Pi_i = u_i(a),$$

где $\Pi(x, a)$ ведет себя вблизи $x = a$ как $\ln(x - a)$. Аналогично, для интегралов второго рода $\Gamma(x, a)$, ведущих себя вблизи $x = a$ как $\frac{1}{x-a}$, имеем

$$\Gamma_i = \frac{d}{dx} u_i(a).$$

[27] (*стр. 56*).

В этой формуле Лежандра F, F' означают четверти периодов интеграла первого рода

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}},$$

а E, E' — интеграла третьего рода

$$\int \frac{(1-\varkappa^2 z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

См. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, т. 3, стр. 156, формула (18).

[28] (*стр. 56*).

См. цитированную книгу Вебера, стр. 156—160, § 48.

[29] (*стр. 57*).

Если допустить, что Галуа был знаком с идеей Якоби-Римана обращения абелевых интегралов, то можно представить себе мысль Галуа так: пусть $u_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — система интегралов первого рода, x — верхний предел интеграции. Задав величины $U_1, U_2, \ldots, U_n$, мы однозначно найдем величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$u_i(\xi_1) + u_i(\xi_2) + \ldots + u_i(\xi_n) = U_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

с точностью до кратностей периодов (вероятно, желая избежать введения периодов, Галуа употребляет намек «приведенных членов»). В этом состоит постановка проблемы обращения интегралов. Однако в решении однозначными («абелевыми») функциями от U_i являются не сами ξ_i, а симметрические функции от них.

Пусть, задав системы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, мы находим также:

$$u_i(\eta_1) + u_i(\eta_2) + \ldots + u_i(\eta_n) = V_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Поставим себе задачу найти значения $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, удовлетворяющие уравнениям

$$u_i(\zeta_1) + u_i(\zeta_2) + \ldots + u_i(\zeta_n) = U_i + V_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Из функционально-теоретических соображений можно убедиться, что симметрические функции от $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ являются рациональными функциями от ξ_i, η_i. (Численно их можно найти из теорем сложения для тета-функций, так как абелевы функции выражаются как дроби, в числителях и знаменателях которых стоят тета-функции.) Поэтому можно, не вычисляя U_i, V_i, найти уравнение n-й степени, корнями которого являются $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. С другой стороны, ясно, что суммы $u_i(\xi_j) + u_i(\eta_j)$ являются решениями последней системы уравнений, т. е. что

$$u_i(\zeta_j) = u_i(\xi_j) + u_i(\eta_j).$$

Под величинами ξ_i, η_i, ζ_i мы разумели просто координаты точек на римановой поверхности, а не значения определенной функции. Можно представить себе ξ_i как совокуп-

ности значений двух функций, связанных алгебраическим уравнением.

Настоящее разъяснение (как и вообще все примечания к мыслям Галуа по теории абелевых интегралов) является лишь попыткой и потому не может претендовать на какую-либо обязательность.

[30] (*стр. 57*).

Вопрос этот в видоизмененной форме разобран у Клебша и Гордана под названием «spezielles Teilungsproblem» (A. Clebsch - P. Gordan, Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig 1866, стр. 241—248). Галуа правильно указывает степень получаемого уравнения, если принять, что p — простое число; в общем случае степень имеет более сложное выражение (loc. cit., стр. 244). Порядка группы Галуа Клебш и Гордан не вычисляют. Можно догадываться, что здесь речь идет о линейных группах $2n$-й степени по модулю p.

[31] (*стр. 57*).

Здесь идет речь о так называемой «общей проблеме деления» (см. Clebsch - Gordan, loc. cit., стр. 232), где также указывается число решений, т. е. степень получаемого уравнения. В дальнейшем авторы показывают, что уравнение решается в радикалах (loc. cit., стр. 231—241). Из слов «суммы n членов» мы можем с большой вероятностью заключить, что Галуа была ясна идея обращения абелевых интегралов.

[32] (*стр. 58*).

Повидимому, речь идет о мемуаре Абеля «Précis d'une théorie des fonctions élliptiques (Oeuvres, т. I, стр. 518—617). Ср., например, с теоремой VIII на стр. 568: «Если имеется какое-нибудь соотношение между некоторым числом эллиптических функций (читай: интегралов), и если обозначить через c модуль одной из них, взятой по произволу, то среди других функций найдется по крайней мере одна с модулем c' такого рода, что между функциями первого рода, соответствующими соответственно модулям c и c', будет иметь место весьма простое соотношение

$$\widetilde{\omega}(y, c') = \varepsilon\widetilde{\omega}(x, c) + C,$$

где y — рациональная функция от x и ε — постоянная величина».

Галуа обобщает этот результат Абеля на произвольные абелевы интегралы.

[33] (*стр. 58*).

Это утверждение очевидно, поскольку переменные в обоих интегралах связаны *бирациональными соотношениями*, в то время как вопрос идет о наименьшей степени уравнения, связывающего обе переменные, определяющие *поля алгебраических функций*; эти уравнения находят при помощи бирационального преобразования первоначального уравнения.

Указанная наименьшая степень равна, а в некоторых случаях меньше, чем ранг n.

[34] (*стр. 58*).

Частный случай *общего преобразования периодов*, когда последние подвергают произвольной целочисленной линейной подстановке. См., например, A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903, стр. 128—207.

[35] (*стр. 58*).

Повидимому, здесь идет речь о проблеме обращения абелевых интегралов.

[36] (*стр. 58*).

Это очень темное место. Может быть, здесь речь идет о подстановках между «неопределенными» величинами (*индетерминатами* по Гауссу), не меняющих алгебраических соотношений между ними. Построение римановой поверхности, сводящей эти подстановки к обходам вокруг критических точек, отчасти реализуют эту мысль Галуа (по типу критических точек можно судить о группе a priori), если эта мысль мной правильно понята. В современной математике роль римановых поверхностей не ограничивается их применением в алгебраических функциях (автоморфные функции, диференциальные уравнения, в особенности линейные, и т. п.).

[37] (*стр. 59*).

Галуа обращается здесь к немецким математикам, повидимому, в связи с небрежным отношением соотечественников к его работам.

[38] (*стр. 61*).

Ср. примечание [37].

[39] (*стр. 63*).

В этом замечании можно видеть идею современного понятия *области рациональности*, т. е. *поля* величин (совокупности величин, воспроизводящихся при производстве над ними четырех арифметических действий), условно считаемых рациональными.

[40] (*стр. 63*).

Здесь дано ясное определение понятия поля

[41] (*стр. 64*).

Речь идет о *гауссовых периодах*. Пусть $n-1=ef$ есть какое-нибудь разложение числа $n-1$ на два множителя. Корнями рассматриваемого уравнения являются

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \text{ где } \varepsilon = e^{2\pi i n}.$$

Если y есть первообразный корень сравнения

$$x^{n-1}-1 \equiv 0 \pmod n,$$

то величина

$$\eta = \varepsilon + \varepsilon^{G^e} + \varepsilon^{G^{2e}} + \ldots + \varepsilon^{G^{(f-1)e}}$$

называется f-членным гауссовым периодом. Этот период вместе с e другими сопряженными периодами есть корень уравнения e-й степени с рациональными коэфициентами. С другой стороны, если присоединить η к области рациональности, то уравнение

$$\frac{x^n-1}{x-1}=0$$

распадется на e неприводимых уравнений f-й степени. Гаусс дает также практический прием для нахождения этих уравнений. См., например, Д. А. Граве, Элементы высшей алгебры, Киев 1914, стр. 601—626.

[42] (*стр. 66*).

Недооценка со стороны Галуа этого типа уравнений, которые в современной математике носят название нормальных уравнений (или уравнений Галуа) и играют фундаментальную роль при обосновании теории Галуа, может быть объяснена тем, что интерес Галуа был направлен главным образом на проблему решения уравнений в радикалах, в то время как свои теоретические соображения он расценивал лишь как средство. Современные же математики считают последнее наиболее драгоценной частью наследства Галуа.

[43] (*стр. 68*).

Введенный Галуа термин «группа перестановок» существенно отличается от современного понятия группы подстановок. У Галуа группой перестановок называется совокупность некоторого их числа, обладающая тем свойством, что переходы от одних перестановок к другим составляют группу подстановок (в современном смысле). Впрочем, в дальнейшем Галуа говорит о «подстановках группы», разумея под этим подстановки, переводящие перестановки группы в перестановки той же группы.

[44] (*стр. 68*).

Этой теоремой Галуа определяет группу, которую теперь принято называть группой Галуа данного уравнения. Определение группы Галуа как «совокупности подстановок, не нарушающих всех рациональных соотношений между корнями уравнения», встречаемое в современных учебниках, по существу равносильно определению Галуа.

[45] (*стр. 68*).

Под «алгебраическим уравнением» Галуа здесь разумеет уравнение, коэфициенты которого суть независимые переменные. Для такого рода уравнения принят также термин «буквенное уравнение».

[46] (*стр. 69*).

Это утверждение является весьма важным свойством нормальных уравнений и обыкновенно формулируется так:

Порядок группы (неприводимого) нормального уравнения равен его степени.

[47] (*стр. 69*).

Рациональность следует из того, что величины ψV, $\psi V', \ldots, \psi V^{(n-1)}$, будучи равны между собой, равны также

своей средней арифметической, а последняя рациональна, как симметрическая функция от корней $V, V', \ldots, V^{(n-1)}$.

[48] (*стр. 70*).

Для большей ясности прибавим: левая часть уравнения $\psi V - F = 0$ должна делиться на неприводимое уравнение, которому удовлетворяет V, в силу чего корнями уравнения $\psi V - F = 0$ являются также $V', V'', \ldots, V^{(n-1)}$.

[49] (*стр. 70*).

См. примечание [43] .

[50] (*стр. 70*).

Здесь мы встречаем намек на современное определение группы, как совокупности операций, не зависящей от того, над какими (и сколькими) корнями они производят подстановки. Проще всего можно разъяснить это замечание Галуа так:

Пусть $a, b, c, \ldots$ будут какие-нибудь корни, числом n, G — группа подстановок над ними, $\varphi(a, b, c, \ldots)$ — функция, принимающая при подстановках группы G ν различных значений: $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(\nu-1)}$. Если мы будем производить над переменными $a, b, c, \ldots$ подстановку S группы G, то функции $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(\nu-1)}$ тоже претерпят подстановку, которую мы будем считать соответствующей подстановке S. Если полученную таким образом группу подстановок над $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(\nu-1)}$ считать другим представлением той же группы G, то мы и придем к концепции группы, независимой от числа символов, перемещаемых ее подстановками.

[51] (*стр. 72*).

Нетрудно понять, как следует дополнить это доказательство. Обозначим через $f(x) = 0$ неприводимое уравнение, которому удовлетворяет V в первоначальной области раци-

ональности, и через $f(x, r) = 0$ — неприводимое уравнение, которому удовлетворяет V после присоединения r. Будем рассматривать тождество

$$f(x) = f(x, r) \cdot \Phi(x, r),$$

где $\Phi(x, r)$ — некоторый полином [частное от деления $f(x)$ на $f(x, r)$], как ряд равенств, связывающих r с рациональными величинами (получаемых приравниванием коэфициентов при различных степенях x). После переноса у них членов в левую часть последняя должна делиться на $\varphi(r)$, где $\varphi(y) = 0$ — неприводимое уравнение, которому удовлетворяет r. Пусть r', r'', ... будут другие корни этого уравнения. Тогда мы можем в нашем равенстве заменить r любым из корней r', r'', ...:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x, r') \cdot \Phi(x, r'), \\ f(x) &= f(x, r'') \cdot \Phi(x, r''), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

откуда следует, что полиномы $f(x, r)$, $f(x, r')$, $f(x, r'')$, ... имеют корнями только корни $f(x) = 0$. Поэтому произведение

$$f(x, r) \cdot f(x, r') \cdot f(x, r'') \ldots,$$

имея рациональные коэфициенты, должно делиться на $f(x)$; не имея же других корней кроме корней $f(x) = 0$, оно равно точно какой-то степени полинома $f(x)$:

$$f(x, r) \cdot f(x, r') \cdot f(x, r'') \ldots = [f(x)]^m$$

(здесь мы обращаем внимание на небольшую неточность в формулировке Галуа: у него $m = 1$).

Каждый из полиномов $f(x, r')$, $f(x, r'')$, ... неприводим в области рациональности, образованной соответственно корнями r', r'', ... В самом деле, если бы имело место, например, $f(x, r') = g(x, r')\, h(x, r')$, то, повторяя предыдущие рассуждения, мы убедились бы, что коэфициенты при степенях x полинома $f(x, y) - g(x, y)\, h(x, y)$ делятся на $\varphi(y)$, откуда следовало бы:

$$f(x, r) = g(x, r)\, h(x, r).$$

что противоречит неприводимости.

Отсюда следует, что в области рациональности, образованной корнем r', группа заданного уравнения состоит из подстановок, переводящих один из корней уравнения $f(x, r') = 0$ в каждый из других корней этого уравнения.

Докажем, что полиномы $f(x, r)$, $f_1(x, r')$, ... попарно либо не имеют вовсе общих корней, либо имеют все общие корни, т. е. совпадают. Пусть $f(x, r)$ и $f(x, r')$ имеют общий корень V и пусть $V_1 = F(V)$ — произвольный другой корень полинома $f(x, r)$. Докажем, что V_1 является также корнем полинома $f(x, r')$. Полином $f(F(x), r)$ имеет с $f(x, r)$ общий корень V и потому делится на $f(x, r)$:

$$f(F(x), r) = f(x, r)\, \Phi(x, r).$$

Рассуждая подобно предыдущему, убеждаемся, что коэфициенты при степенях x в полиноме $f(F(x), y) - f(x, y)\, \Phi(x, y)$ делятся на $\varphi(y)$, в силу чего имеем

$$f(F(x), r') = f(x, r')\, \Phi(x, r').$$

Подставляя $x = V$, получим $f(V_1, r') = 0$, ч. и тр. д. Поэтому, выбирая среди полиномов $f(x, r)$, $f(x, r')$, ... различные и перемножая их, получим $f(x)$, т. е. формула Галуа остается в силе при несколько другом ее толковании.

[52] (*стр. 73*).

По терминологии Галуа вся группа *перестановок* распадается на p различных групп, каждая из которых есть группа заданного уравнения после присоединения одного из корней r, r', r'', ... По современной терминологии после присоединения r группа уравнения понижается до *подгруппы* H, переводящей V в корни V, V', V'', ... уравнения

$f(x, r) = 0$. Какова группа уравнения после присоединения r'? Пусть $V_1 = F(V)$ — один из корней уравнения $f(x, r') = 0$. Согласно Галуа искомая группа состоит из перестановок, соответствующих корням $F(V), F(V'), F(V''), \ldots$ Подстановки, переводящие эти перестановки друг в друга, и составляют искомую группу в современном смысле. Но чтобы сравнить эту группу с H, необходимо, как отмечает и Галуа, исходить из какой-нибудь перестановки, например той, которой соответствует V. Пусть (V) переводится в $(F(V))$ подстановкой S, и пусть T — произвольная подстановка подгруппы H, переводящая (V) в (V'). Определим, какая подстановка переводит $(F(V))$ в $(F(V'))$. Переводя $(F(V))$ в (V), затем в (V') и, наконец, в $(F(V'))$, мы видим, что искомой подстановкой является $S^{-1}TS$. Если T пробегает все подстановки группы H, то все подстановки $S^{-1}TS$ образуют группу того же порядка, называемую *сопряженной* с H группой и обозначаемую так: $S^{-1}HS$. Это как раз и есть группа заданного уравнения после присоединения r'.

[53] (*стр. 73*).

Можно попытаться восстановить это доказательство следующим образом: построим для уравнения, которому удовлетворяют $r, r', r'', \ldots$, вспомогательное уравнение такого рода, чтобы через его корень W, являющийся рациональной функцией (например линейной) от $r, r', r'', \ldots$, рационально выражался каждый из корней $r, r', r'', \ldots$ (см. леммы II и III). В частности, через W будут рационально выражаться сопряженные с W корни. Из этого следует, что присоединение к области рациональности всех корней $r, r', r'', \ldots$ равносильно присоединению корня W.

Обратимся к разложению Галуа (см. теорему II и примечание [51]):

$$f(x) = f(x, W) \cdot f(x, W') \cdot f(x, W'') \ldots$$

Перестановки, соответствующие корням одного и того же множителя правой части, переходят друг в друга при помощи подстановок, образующих группу Галуа заданного уравнения, получаемую после присоединения соответственно величин $W, W', W'', \ldots$ Но мы видели, что все эти присоединения равносильны, в силу чего подстановки, соответствующие тому или другому множителю правой части, одни и те же, и т. д.

Переходя к современным обозначениям (см. [52]), мы получим:

$$H = S^{-1}HS = S'^{-1}HS' = \ldots,$$

т. е. все группы, сопряженные с H, равны. Подгруппы, обладающие таким свойством, называются *нормальными делителями*. У Галуа соответствующее им разложение называется *собственным*.

[54] (*стр. 77*).

Таким образом условие разложимости уравнения в радикалах может быть формулировано так: Надо, чтобы его группа содержала нормальный делитель, число подстановок в котором (*порядок группы*) было бы в p раз меньше, чем в первоначальной группе; в этом нормальном делителе должен содержаться нормальный делитель с таким же свойством и т. д. до конца. В настоящее время группы, обладающие таким свойством, называются *разрешимыми группами*.

[55] (*стр. 79*).

Следует добавить: «и не делится на эту степень».

[56] (*стр. 80*).

Следует добавить, что здесь и в дальнейшем, если величина $k + c$ превысит $n - 1$, то в этом значке следует отбросить лишнюю кратность числа n. Поэтому рассматри-

ваемые здесь аналитические представления подстановок рассматриваются как сравнения по модулю n.

[57] (*стр. 82*).

Переписывая полученные равенства так:

$$\begin{aligned} x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha^{n-1} x_{n-1} &= \sqrt[n]{X_1}, \\ x_0 + \alpha^b x_1 + \ldots + \alpha^{(n-1)b} x_{n-1} &= \sqrt[n]{X_\alpha}, \\ x_0 + \alpha^{b^2} x_1 + \ldots + \alpha^{(n-1)b^2} x_{n-1} &= \sqrt[n]{X_{\alpha^2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

где b определяется из сравнения $ab \equiv 1 \pmod{n}$, складывая их и прибавляя равенство $x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} = -a_1$, где $-a_1$, являющаяся симметрической функцией, рационально известна, мы в силу соотношения $1 + \alpha^{kb} + \alpha^{kb^2} + \ldots = 0$ (b — первообразный корень, k не делится на n) получаем

$$x_0 = \frac{1}{n}\left\{-a_1 + \sqrt[n]{X_1} + \sqrt[n]{X_\alpha} + \sqrt[n]{X_{\alpha^2}} + \ldots\right\}.$$

[58] (*стр. 83*).

То-есть чтобы уравнение, корнем которого является эта величина, имело по крайней мере один рациональный корень.

[59] (*стр. 84*).

Под циклической подстановкой здесь разумеется цикл, содержащий все n корней. Под «одной единственной циклической подстановкой» разумеются наряду с циклической подстановкой A также ее степени $A^2, A^3, \ldots, A^{n-1}$ ($A^n = 1$). Если бы в группу входила также отличная от них цикличес-

кая подстановка B, то все подстановки $A^r B^s$ были бы различны ($r, s = 0, 1, \ldots, n-1$), так как из $A^r B^s = A^u B^v$ следовало бы $A^{r-u} = B^{v-s}$, и если, например, $v - s$ не делится на n, то, решая сравнение $(v - s)\xi \equiv 1 \pmod{n}$, мы бы получили

$$B = B^{(v-s)\xi} = \left[B^{v-s}\right]^\xi = A^{(r-u)\xi},$$

т. е., вопреки предположению, B была бы одной из степеней A. Таким образом в группе содержалось бы по крайней мере n^2 различных подстановок.

Собственно говоря, следовало бы еще доказать, что одна циклическая подстановка непременно войдет в группу. Это можно доказать так. Заданное уравнение неприводимо, а потому его группа *транзитивна*, т. е. в ней существуют подстановки, переводящие любой корень в любой другой. Действительно, если бы, например, x_0 переводился бы только в $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ ($m < n$), то симметрические функции от этих корней были бы рациональны, т. е. уравнение допускало бы рациональный множитель степени $m < n$. В силу этого в группе содержится подстановка, перемещающая все корни. В самом деле, допустим противное. Тогда пусть подгруппа, состоящая из всех подстановок, оставляющих один корень на месте, состоит из s подстановок. Полная группа будет состоять из ns подстановок. Но это невозможно, так как каждая из ns подстановок должна согласно предположению входить по крайней мере в одну из подгрупп, оставляющих один из корней на месте, а подстановка, оставляющая все корни на месте (единичная), войдет во все эти подгруппы.

Не может быть также, чтобы такая подстановка перемещала бы часть корней $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ между собой, а остальные корни тоже между собой, так как из того, что сумма $m + (n - m) = n$ есть простое число, следует, что m и $n - m$ не равны. Тогда m-я степень этой подстановки, будучи

отлична от единичной подстановки, оставит $m > 1$ корней на месте, а это противоречит предположению. Отсюда следует, что все корни $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ перемещаются этой подстановкой циклически в каком-то порядке, т. е., что подстановка циклическая, ч. и тр. д.

[60] (*стр. 84*).

Из того, что группа содержит степени $A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ только одной циклической подстановки, следует, что подстановка $S^{-1}AS$, будучи тоже циклической, равна степени подстановки A (т. е. что подгруппа, состоящая из степеней A, есть нормальный делитель нашей группы). Следовательно, к нашей группе можно применить рассуждения, которыми пользовался Галуа при доказательстве предложения VII.

[61] (*стр. 85*).

Импримитивным (непримитивным) называется уравнение, которое, будучи, например, степени mn, распадается на m множителей степени n, если к области рациональности присоединить корни некоторого уравнения степени m (см. доказательство предложения II предыдущей статьи). Метод Гаусса как раз и состоит в такого рода присоединениях (см. примечание [41]). Уравнение, не обладающее таким свойством, называется примитивным.

[62] (*стр. 86*).

Системы соединенных букв (по современной терминологии *системы импримитивности*) — это системы корней одних и тех же неприводимых частей уравнения, на которое последнее распадается при соответствующем присоединении (см. примечание [53]). Системы соединенных букв можно охарактеризовать тем свойством, что всякая подстановка группы целиком переводит одну систему в другую.

[63] (*стр. 87*).

Если a и b не входят ни в какую общую систему соединенных букв, то для каждой буквы a существует совокупность букв, обладающая тем свойством, что каждая из них лежит в какой то системе (из P букв) вместе с a, в то время как буквы, не лежащие в совокупности, этим свойством не обладают. Разбив все буквы на такие совокупности, мы убедимся, что они являются системами соединенных букв для группы G. В самом деле, допустим, что a и a_1 находятся в одной и той же совокупности, и что подстановка S из G переводит их соответственно в буквы b и c разных совокупностей. Из того, что H есть нормальнай делитель G, следует, что группа H останется той же, если мы над всеми переставляемыми буквами произведем подстановку S, т. е. a заменим через b, а a_1 через c_1. Но это невозможно, поскольку a и a_1 принадлежат к одной совокупности, а b и c — к разным. Это свойство характеризует наши совокупности как системы соединенных букв для группы G, что противоречит ее примитивности.

[64] (*стр. 87*).

Сделаем дополнительно предположение, что P есть наименьшее число букв в возможных системах соединенных букв группы H. Пусть две системы соединенных букв (по разным способам разбиения) содержат более, чем одну общую букву. Тогда система общих букв в обеих системах тоже составит систему соединенных букв. В этом нетрудно убедиться, рассматривая неприводимые (при различных присоединениях) уравнения, корнями которых являются буквы обеих систем, и их общий наибольший делитель.

[65] (*стр. 88*).

Сопоставим рассуждение Галуа с теоремами, на которых основан современный вывод этого результата:

Всякая разрешимая группа имеет отличный от единицы абелев (т. е. коммутативный) нормальный делитель.

Группа, имеющая интранзитивный нормальный делитель, импримитивна.

Абелева группа, порядок которой содержит различные простые множители или которая содержит подстановки не простой степени, должна содержать подгруппу, являющуюся нормальным делителем содержащей ее (разрешимой) группы.

Порядок транзитивной абелевой группы подстановок равен числу перемещаемых букв.

Число перемещаемых букв в примитивной разрешимой группе есть степень простого числа (p). Ее абелев нормальный делитель состоит из подстановок порядка p.

[66] (*стр. 90*).

Три последние формулы написаны неправильно. Их следует читать так:

$$(a_{k_1, k_2},\quad a_{k_1+n,\ k_2}),\ (a_{k_1, k_2},\ a_{k_1,\ k_2+r}),$$

$$(a_{k_1,\ k_2},\ a_{k_1+n_1,\ k_2+n_2}).$$

На это указывает также следующая ниже формула (a). К сожалению, я лишен возможности установить, является ли эта неправильность следствием описки самого Галуа или опечатки в издании его сочинений.

[67] (*стр. 91*).

В самом деле, зададимся вопросом, сколько букв не изменяется от подстановки

$$(a_{k_1,\ k_2},\quad a_{m_1k_1+n_1k_2+\alpha_1,\ m_2k_1+n_2k_2+\alpha_2}).$$

Чтобы буква a_{k_1, k_2} была такого рода, необходимо и достаточно, чтобы имели место сравнения

$$(m_1-1)\,k_1+n_1k_2+\alpha_1\equiv 0 \pmod p,$$

$$m_2k_1+(n_2-1)\,k_2+\alpha_2\equiv 0 \pmod p.$$

Здесь могут встретиться следующие возможности: 1) сравнения несовместны; тогда подстановка перемещает все буквы; 2) определитель $(m_1-1)(n_2-1)-m_2n_1$ не делится на p; тогда система допускает одно и только одно решение; подстановка перемещает p^2-1 букв; 3) одно сравнение является следствием другого; если, например, коэфициент при k_1 не делится на p, то можно задавать по произволу значение k_2, и k_1 тогда будет определяться однозначно; подстановка будет перемещать p^2-p букв; 4) оба сравнения тождественно удовлетворяются, т. е.

$$m_1\equiv n_2\equiv 1,\quad n_1\equiv m_2\equiv \alpha_1\equiv \alpha_2\equiv 0 \pmod p;$$

получается тождественная подстановка, не перемещающая ни одной буквы.

[68] *(стр. 91)*.

Галуа под порядком подстановки разумеет число перемещаемых ею цифр, в то время как современное понятие «порядок» (наименьшая степень подстановки, дающая единичную подстановку) он обозначает термином *период*.

[69] *(стр. 91)*.

Теперь можно считать, что это исследование Галуа имеет общий характер, так как доказано, что всякая примитивная разрешимая группа имеет абелев нормальный делитель H порядка p^ν, все подстановки которого имеют порядок (период) p. См. примечание [65].

[70] *(стр. 96)*.

Группы типа $(b_{k_1,\ k_2},\ b_{m_1k_1+n_1k_2,\ m_2k_1+n_2k_2})$ теперь носят название *геометрических групп*, в то время как группы типа $(a_{k_1,\ k_2},\ a_{k_1+\alpha_1,\ k_2+\alpha_2})$ называются *арифметическими*. Можно доказать, что в каждой линейной группе ее геометрическая подгруппа изоморфна с факторгруппой (допол-

нительной группой) относительно ее арифметической подгруппы, которая всегда абелева. В силу этого линейная группа разрешима тогда и только тогда, если разрешима ее геометрическая подгруппа.

[71] *(к стр. 103).*

Приводимые здесь рассуждения могут современному читателю показаться почти тривиальными. Однако, если мы вспомним, что это предисловие написано почти на рубеже XVIII и XIX вв., и учтем, что проповедуемое Галуа подчинение выкладок общим концепциям нашло свое яркое выражение лишь в продолжение XIX и даже XX вв., являясь их самой характерной чертой, — то можно рассматривать это предисловие как предвидение развития математики на столетие вперед.

[72] *(к стр. 107).*

Точно так же подчеркиваемая Галуа недостаточность для математика логического мышления и роль конструктивного элемента в творчестве характерны для XIX и XX вв.

[73] (*к стр. 111*).

Афоризмы, смысл и значение которых трудно отгадать, не зная, по какому поводу они написаны.

[74] *(к стр. 126).*

По современной терминологии H является *нормализатором* группы K внутри G. Таким образом лемму I можно формулировать так:

Индекс нормализатора группы K относительно G сравним с единицей по модулю порядка группы K.

Легко понять, что при такой общей формулировке лемма I несправедлива. В самом деле, возьмем в качестве группы G

группу порядка p^m, где p — простое число, у которой не все делители были бы нормальны, и пусть K будет один из ее не нормальных делителей порядка p^k. Тогда H отлично от G и индекс H должен быть степенью p, так что доказываемое сравнение очевидно не может иметь места.

Однако лемма I справедлива для одного весьма важного частного случая, когда группа K имеет порядок p^k, в то время как индекс K относительно G взаимно прост с p. Это так называемые *группы Силова* (Sylow), существование которых доказывается и составляет содержание *первой теоремы Силова*. В этом случае лемма I составляет содержание *второй теоремы Силова* (см. H. W e b e r, loc. cit., т. 2, стр. 135—139).

[75] *(к стр. 126).*

Проще всего вывести это тождественное сравнение, если доказать, что полином $\frac{x^\mu - 1}{x - 1}$ в правой части имеет те же корни $p, p^2, \ldots, p^{\mu-1}$ по модулю $\frac{p^\mu - 1}{p - 1}$, что и полином в левой части. Но это вытекает из того, что $\frac{p^{k\mu} - 1}{p^k - 1}$ делится на $\frac{p^\mu - 1}{p - 1}$ при $(k, \mu) = 1$. Кроме того, оба полинома имеют одинаковые старшие коэфициенты. Очевидно, что показатели $k = 1, 2, \ldots, \mu - 1$ взаимно просты с μ, если μ — простое число.

Н. Г. ЧЕБОТАРЕВ.

ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ГАЛУА

Только что истекший столетний юбилей со дня смерти Эвариста Галуа (Évariste Galois)[1]) дает мне повод изложить современное состояние его важнейшего творения, известного под именем „теория Галуа“. Вместе с тем я попытаюсь сделать кое-какие предположения относительно теории Галуа будущего. Первоначальная основная задача теории Галуа, вопрос о представлении корней алгебраических уравнений через радикалы, была почти разрешена самим Галуа и его ранними последователями. Однако главное орудие, которым Галуа пользовался в своих исследованиях, — описание числовых алгебраических полей при помощи соответствующих им групп, — обнаружило свою силу также в достаточно отдаленных областях математического анализа. На его основе в математике возникли такие новые отделы, как „римановы

[1]) Обзор написан в 1932 г. и опубликован в шестом томе „Commentarii Mathemetici Helvetici“. Его части послужили материалом для докладов автора на Международном математическом съезде в Цюрихе (1932) и 2-м Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде (1934).

поверхности", „автоморфные функции", „непрерывные группы преобразований", и т. п.

Кроме того, в самой классической теории Галуа возникли новые задачи, потребовавшие существенного углубления основных методов теории Галуа. Проблема построения уравнений с заданной группой потребовала изучения полей общих рациональных функций (проблема Люрот-Штейница). С другой стороны, обобщение проблемы решения в радикалах, так называемая клейнова проблема форм, связала теорию конечных групп с теорией непрерывных групп. „Линейная теория групп" является мостом, соединяющим обе ветви теории групп.

Настоящий обзор имеет целью очертить современный математический аппарат, могущий быть полезным для овладения проблемами теории Галуа. При этом я понимаю термин „теория Галуа" в несколько более широком смысле, чем это принято при приложении теории групп к алгебраическим уравнениям. Именно, я включаю в него все вопросы, которые противопоставляют понятию „рациональное" понятие „алгебраически иррациональное". Сюда, например, относятся некоторые прекрасные результаты и проблемы теории полей алгебраических функций от многих переменных, которые до сих пор решены только при помощи методов алгебраической геометрии. Большой заслугой старых немецких и итальянских геометров является то, что они решили многие из этих проблем методами алгебраической геометрии, в то время как мы, алгебраисты, не имеем для них никаких методов.

Я кладу в основу выбора материала для настоящего обзора, главным образом, свой личный вкус, в силу чего не имею никаких притязаний на объективность этого выбора.

§ 1. *ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГАЛУА*

1. Можно разделить работы, имеющие дело с основами теории Галуа, на две категории. К первой принадлежат работы, ищущие новых путей для обоснования классической теории Галуа, в то время как работы второй категории углубляют понятие группы Галуа и делают возможным его применения к гораздо более широким областям, чем это возможно в классической теории.

2. Среди работ первой категории следует в первую очередь указать на работы Ф. Мертенса (Mertens) (50), С. О. Шатуновского (62) и А. Лёви (Loewy) (46, 47). Мертенс определяет группу Галуа и доказывает связанные с нею основные теоремы, не прибегая к понятиям нормального поля, резольвенты Галуа и т. п. Он исходит из понятия неприводимости в расширенных областях. Если заданное уравнение $f(x)=0$ неприводимо и x_1 — один из его корней, то он находит множитель $f_1(x; x_1)$ полинома $\frac{f(x)}{x-x_1}$, неприводимый в области $K[x_1]$. Далее, он находит в области $K[x_1, x_2]$ неприводимый множитель полинома $\frac{f_1(x; x_1)}{x-x_2}$, где x_2 — один из корней полинома $f_1(x; x_1)$. Продолжая таким образом, он приходит к системе

$$Z_0=f(x),\quad Z_1=f_1(x; x_1),\quad Z_2=f_2(x; x_1, x_2),\ \ldots,$$
$$Z_{n-1}=f_{n-1}(x; x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \qquad (1.1)$$

полиномов, образующих систему *фундаментальных модулей*. Всякая целая рациональная функция $\varphi(x; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна нулю тогда и только тогда,

если она (при переменных x_i) может быть представлена в виде

$$P_0 Z_0(x_1) + P_1 Z_1(x_2) + \ldots + P_{n-1} Z_{n-1}(x_n), \quad (1.2)$$

где P_i — полиномы. Группа Галуа состоит из подстановок, переводящих каждый полином $Z_i(x_{i+1})$ в полином вида (1.2). Порядок этой группы Галуа равен произведению степеней полиномов (1.1).

3. Шатуновский развивает теорию, формально совпадающую с мертенсовской, но исходит из гораздо более общей точки зрения. Его работа опирается на кронекеровскую идею функциональных модулей, состоящую в том, что каждую величину, рационально зависящую от корня x_1 уравнения

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (1.3)$$

рассматривают как функцию от независимой переменной, но в то же время под равенством понимают сравнение по модулю $f(x)$. Но так как в теории Галуа имеют дело также с функциями от нескольких корней уравнения (1.3), то Шатуновский задается целью найти такого рода систему функциональных модулей от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, чтобы система вычетов (или классов) по этим модулям была изоморфна алгебраическому полю, образованному корнями уравнения (1.3). Система модулей

$$\begin{aligned} \psi_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n + a_1, \\ \psi_2 &= x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n - a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n &= x_1 x_2 \ldots x_n - (-1)^n a_n \end{aligned} \quad (1.4)$$

для этого не годится, так как, например, $f(x_i)$ не сравнимы с нулем по этой системе модулей. Система

$$f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n) \quad (1.5)$$

также не приспособлена для этой цели, так как, например,

$$\psi_i \text{ не} \equiv 0 \pmod{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)},$$

в то время как

$$\psi_i V \equiv 0 \pmod{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)},$$

где V — вандермондовский определитель из величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По современной терминологии системы (1.4) и (1.5) не являются *простыми идеалами*.

Шатуновский находит искомую систему модулей, кладя в основу так называемые *модули Коши*, которые получаются так: в качестве первого модуля берем $f(x_1)$; в качестве второго — частное от деления $f(x_1)$ на $x_1 - x_2$; в качестве третьего — частное от деления второго модуля, расположенного по степеням x_2, на $x_2 - x_3$, и т. д. Система модулей Коши дает систему вычетов, изоморфную с рассматриваемым полем, в том и только в том случае, если уравнение (1.3) без аффекта. Тогда каждый из этих модулей неприводим по системе предшествующих модулей. В случае, когда это не имеет места, Шатуновский приходит к системе модулей Мертенса. Степени этих модулей позволяют делать заключения относительно порядка транзитивности, а также примитивности группы уравнения (1.3). Например, если первые k этих модулей совпадают с модулями Коши, то группа k раз транзитивна.

Работа Шатуновского содержит вводные основы теории, называемой теперь *теорией полиномиальных идеалов*. Она имеет дело с областями, модули которых приводимы. Если при этом можно так присоединить несколько (конечное число) новых модулей, чтобы область перешла в поле, то Шатуновский называет первоначальную область „*полукорпусом*“.

Имеет важное значение введенное Шатуновским понятие *присоединений второго рода*. Так он называет области, происшедшие из первоначальных областей путем присоединения к их системам модулей новых модулей или, другими словами, путем приравнивания нулю некоторых величин, неравных нулю в первоначальной области. Было бы естественнее назвать эти присоединения *дополнительными областями* (Faktorbereiche), в соответствии с понятием *дополнительной группы* (Faktorgruppe). Имеет место теорема, что поля не допускают присоединений второго рода. Но при этом принимается, что все поля могут иметь только нулевую характеристику. Если же перейти к характеристике p, где p — простое число, то это ведет к присоединению нового модуля p, и поле остается полем.

Исходя из определения группы Галуа по Мертенсу-Шатуновскому, можно весьма легко доказать следующую теорему, впервые доказанную И. Шуром (I. Schur) (70; см. также 79):

Группа дополнительного поля изоморфна с делителем группы первоначального поля.

4. Обоснование теории Галуа по Лёви имеет некоторые точки соприкосновения с теорией Мертенса-Шатуновского, прежде всего в том, что оно избегает употребления нормальных полей в качестве основного понятия. Лёви исходит не от одной, а от нескольких алгебраических величин, которые образуют поле P и называются *диригентами*. Первая диригента ϱ_1 есть корень уравнения с коэфициентами из области рациональности; вторая диригента ϱ_2 есть корень уравнения вида $f(\varrho_1; z) = 0$; третья — уравнения вида $f(\varrho_1, \varrho_2; z) = 0$ и т. д. Если все эти уравнения неприводимы, то Лёви называет „*трансмутацией поля* P“ замену диригенты ϱ_i сопряженным корнем во всех уравнениях, в которые входит ϱ_i (что также требует изменения всех последующих диригент), и доказывает, что трансмутации не нарушают соотношений, имеющих место между диригентами. В общем случае трансмутации выводят некоторые величины из поля P. Те же трансмутации, которые не выводят из поля P его величин, образуют группу, называемую *группой автоморфных трансмутаций*. С точки зрения теории групп это обозначает следующее: поле P, если оно не нормально, не определяется своей группой; оно определяется своей группой Галуа $\mathfrak{G}$, а также той подгруппой $\mathfrak{H}$, к которой принадлежит примитивная величина поля P. Если $\mathfrak{N}$ есть нормализатор группы $\mathfrak{H}$ внутри $\mathfrak{G}$, то группа автоморфных трансмутаций изоморфна с $\mathfrak{N}/\mathfrak{H}$. Совокупность же всех трансмутаций поля P не образует группы в обычном смысле. Лёви называет такого рода совокупности операций *смешанными группами* (Mischgruppen) и исследует их структурные свойства (47). Всякая смешанная группа $\mathfrak{T}$ содержит *ядро* $\mathfrak{G}$, т. е. наибольшую группу внутри $\mathfrak{T}$, и состоит из нескольких *смежных классов* (Nebengruppen) по $\mathfrak{G}$. Существенно, что дополнительная к $\mathfrak{T}$ группа по любому (не непременно нормальному) делителю $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ есть также смешанная группа с ядром $\mathfrak{N}/\mathfrak{G}$, где $\mathfrak{N}$ — нормализатор $\mathfrak{H}$ внутри $\mathfrak{G}$. Эти свойства дают право считать смешанную группу более адэкватным образом алгебраического поля.

Подобное же групповое образование было введено Г. Брандтом (H. Brandt) (7) и названо *брандтовым группоидом*.

5. Прежде чем перейти к работам второй категории, мы должны очертить современную концепцию понятия „группа Галуа“, отличающуюся от старой

концепции. Если я не ошибаюсь, новая концепция намечена Дедекиндом (R. Dedekind) (16). Первоначально в теории Галуа элементы группы Галуа, или подстановки, рассматривались как операции взаимной замены корней одного определенного уравнения (которое могло быть и приводимым), не нарушающие соотношений между этими корнями. Современная же теория Галуа рассматривает переходы, претерпеваемые одновременно всеми величинами поля K, не нарушающие имеющих место между ними соотношений. Другими словами, каждый элемент группы Галуа есть отображение (нормального) поля самого на себя или, как принято говорить в теории групп, автоморфизм, т. е. такой переход всех величин поля в другие величины того же поля, который переводит сумму и произведение в сумму же и произведение.

6. Для теории Галуа особенно существенно сопоставление делителей поля K и делителей его группы Галуа $\mathfrak{G}$. Точнее это можно формулировать так (43; 74, Добавление; 3): Сопоставим с каждым делителем U поля K наибольшую подгруппу $\mathfrak{H}(U)$ группы $\mathfrak{G}$, не меняющую величин поля U. С другой стороны, сопоставим с каждой подгруппой $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ наибольший делитель $U(\mathfrak{H})$ поля K, величины которого не меняются при подстановках из $\mathfrak{H}$. Из $U_1 \supset U_2$ следует $\mathfrak{H}(U_1) \subset \mathfrak{H}(U_2)$, и обратно. Кроме того,

$$U[\mathfrak{H}(U)] \supset U, \quad \mathfrak{H}[U(\mathfrak{H})] \supset \mathfrak{H}. \tag{1.6}$$

Но теорию Галуа можно беспрепятственно развить только тогда, если

$$U[\mathfrak{H}(U)] = U, \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{H}[U(\mathfrak{H})] = \mathfrak{H}. \tag{1.8}$$

Чтобы имело место (1.8), поле K должно быть конечным относительно своей области рациональности [Круль (W. Krull) (43)].

Чтобы имело место (1.7), поле должно быть *первого рода* относительно своей области рациональности [Бэр-Гассе (R. Baer-H. Hasse) (74, Добавление)].

Если K имеет делителем поле рациональных чисел (тогда говорят: K имеет нулевую характеристику), то K непременно первого рода. Если же K имеет характеристику p (т. е. если существует простое число p, равное внутри K нулю), то K первого рода тогда и только тогда, если величина, порождающая поле K, удовлетворяет неприводимому уравнению, все корни которого различны.

K конечно относительно своей области рациональности, если существует такого рода базис из конечного числа членов, что каждая величина поля K линейно выражается через элементы базиса с коэфициентами из области рациональности.

7. Круль (43) распространил основную теорему теории Галуа на случай бесконечного K, принимая во внимание не все подгруппы группы $\mathfrak{G}$, а только *замкнутые*. Под этим он разумеет следующее. Если γ — элемент группы $\mathfrak{G}$ и $\varkappa$ — конечный нормальный делитель поля K, то γ производит некоторое отображение поля $\varkappa$ на самого себя. Если γ и γ^* производит одно и тоже отображение поля $\varkappa$, то будем говорить, что γ^* находится в $\varkappa$-окрестности элемента γ. Это определение окрестности удовлетворяет всем аксиомам Гаусдорфа (Hausdorff):

a) Всякий элемент γ содержится в своей окрестности.

b) Пересечение двух окрестностей элемента γ содержит новую окрестность элемента γ. Более того, оно само есть окрестность элемента γ. В самом де-

ле, пересечение $\varkappa_1$- и $\varkappa_2$-окрестности есть $\varkappa_3$-окрестность, где $\varkappa_3$ есть наименьшее поле, содержащее $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, и потому конечное и нормальное.

c) Если δ есть элемент $\varkappa$-окрестности элемента γ, то существует окрестность элемента δ, целиком лежащая в $\varkappa$-окрестности элемента γ. Более того: $\varkappa$-окрестности элементов γ и δ совпадают, так как каждая из них есть совокупность всех элементов из $\mathfrak{G}$, которые производят среди элементов поля $\varkappa$ одну и ту же подстановку.

d) Если γ и δ различные элементы группы $\mathfrak{G}$, то существует окрестность элемента γ, не содержащая элемента δ. В самом деле, если γ и δ различны, то в K содержатся величины, ведущие себя по отношению к γ и к δ различным образом. Так как каждая из таких величин образует конечное поле, то последним соответствуют взаимно простые окрестности элементов γ и δ.

Это определение позволяет также определить элементы сгущения (э. с.). Если $\mathfrak{H}$ — делитель группы $\mathfrak{G}$, то э. с. группы $\mathfrak{H}$ должен содержать в каждой своей окрестности элементы из $\mathfrak{H}$; э. с. группы $\mathfrak{H}$ может и не содержаться в $\mathfrak{H}$. Если же делитель $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ содержит все свои э. с., то назовем его *замкнутым*. Всякая группа, к которой принадлежит делитель поля K, замкнута. Обратно, к каждой замкнутой группе $\mathfrak{H}$ принадлежит делитель U поля K, причем $\mathfrak{H}[U(\mathfrak{H})] = \mathfrak{H}$. Таким образом, чтобы распространить теорию Галуа на бесконечные поля, надо рассматривать только те подгруппы его группы Галуа, которые замкнуты.

8. Условия соблюдения соотношения (1.7) были подробно изучены Бэром (R. Baer) (3). Он нашел, что всегда существует определенное промежуточное поле S, которое он назвал *жестким полем* (starrer Körper), между K и областью рациональности. Жесткое поле характеризуется тем, что K *ординарно* [т. е. имеет место (1.8)], если взять S в качестве области рациональности, в то время как все величины из S инвариантны по отношению ко всем автоморфизмам поля K. Здесь я не могу ближе входить в подробности этой интересной работы.

9. Весьма трудно определить группу Галуа для тех случаев, когда исследуемое поле имеет более высокую степень трансцендентности, чем его область рациональности. Причина лежит в том, что *универсальная норма* подобного поля (т. е. поле, содержащее все поля, сопряженные со всевозможными делителями поля) является бесконечным полем, с трудом поддающимся аналитическому определению. Чтобы построить, хотя бы теоретически, группу, обладающую основными свойствами группы Галуа такого поля, наметим следующую схему. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут производящие величины поля K, между которыми пусть имеют место некоторые алгебраические соотношения, которые мы будем обозначать через (I). Точно так же можно определить каждый делитель U поля K при помощи производящих величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, где ξ_i рационально выражаются через x_i:

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Уравнения

$$\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad \text{(II)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

определяют новое поле, образующие элементы которого

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n'; \ldots]$$

связаны соотношениями (I) и (II). Это поле можно назвать *относительной нормой* (по отношению к U) поля K. Переход от $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ может быть рассматриваем или как трансмутация поля K, или как подстановка его относительной нормы. Если U пробегает все делители поля K, то все соответствующие относительные нормы порождают искомую универсальную норму. Композит всех построенных таким образом подстановок есть группа, обладающая всеми основными свойствами группы Галуа.

10. Можно также несколько иначе построить группу Галуа поля алгебраических функций, рассматривая не функции поля, а совокупность их численных значений, которые образуют так называемую *абсолютную риманову поверхность* [см. (86)]. Тогда каждое преобразование группы Галуа переводит каждое значение какой-нибудь функции поля K в другое значение, причем между значениями различных функций сохраняются прежние соотношения. Так как каждая функция вполне определяется совокупностью своих значений, то каждое преобразование определяет также функцию, в которую переходит каждая заданная функция. В группе этих преобразований содержатся, между прочим, различные группы монодромии, оставляющие неподвижными те или иные области иррациональности. Может легко случиться, что такое преобразование выводит из K некоторые функции поля K. В случае одной независимой переменной это найдет свое выражение в том, что функция

$$f \simeq \frac{\mathfrak{p}_1' \, \mathfrak{p}_2' \ldots \mathfrak{p}_m'}{\mathfrak{p}_1 \, \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_m},$$

определяемая с точностью до постоянного множителя

своими нулевыми и бесконечными точками, перейдет в частное

$$\frac{\overline{\mathfrak{p}}_1' \, \overline{\mathfrak{p}}_2' \ldots \overline{\mathfrak{p}}_m'}{\overline{\mathfrak{p}}_1 \, \overline{\mathfrak{p}}_2 \ldots \overline{\mathfrak{p}}_m},$$

числитель и знаменатель которого лежат в различных идеальных классах. Всякое преобразование, переводящее дивизоры в эквивалентные дивизоры, принадлежит к так называемой *группе преобразований в себя* (38), которая играет роль, аналогичную роли введенной Лёви (47), *группы автоморфных преобразований*.

11. В теории алгебраических функций играет важную роль еще одна группа, стоящая в тесной связи с только что рассмотренной группой.

Обозначим через $u_1^{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}, u_2^{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}, \ldots, u_p^{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ линейно независимые абелевы интегралы первого рода, определенные на римановой поверхности поля K. Якобиева проблема обращения состоит в решении системы уравнений

$$u_i^{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1'} + u_i^{\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2'} + \ldots + u_i^{\mathfrak{p}_p, \mathfrak{p}_p'} \equiv v_i \qquad (1.9)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p),$$

где нижние границы $\mathfrak{p}_i$ заданы, верхние $\mathfrak{p}_i'$ ищутся, а сравнения взяты по системам периодов как по модулям. Эта проблема при „общем положении“ точек $\mathfrak{p}_i$ решается однозначно (54, 4) Будем считать $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_i'$ координатами точек P, P', p-мерного пространства; тогда каждая система значений параметров v_i определит преобразование, переводящее всякую точку P в определенную точку P' (здесь надо считать точки, отличающиеся порядком значений координат, не различными, так что все эти точки можно однозначно определить при помощи симметрических функций

от значений координат). Группа этих преобразований *локально-изоморфна* [см. (67)] с p-членной группой параллельных переносов и находит свое аналитическое выражение в формулах сложения абелевых функций. Она является делителем *продолженной группы Галуа*, которая преобразует координаты точки P независимо друг от друга. В дальнейшем будем называть эту группу *якобиевой группой*

§ 2. *УРАВНЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ГРУППОЙ*

1. Проблема разыскания уравнений с заданной группой принадлежит к числу важнейших проблем современной теории Галуа и до сих пор не решена. Ее можно поставить в одной из следующих трех форм:

I. Найти какие-нибудь уравнения, группа которых была бы изоморфна с заданной группой $\mathfrak{G}$.

II. Найти общую параметрическую форму коэфициентов уравнения, группа которого была бы изоморфна с $\mathfrak{G}$ или с делителем $\mathfrak{G}$. Представляемость коэфициентов в этой форме должна быть необходимым и достаточным условием того, чтобы группа уравнения была изоморфна или с $\mathfrak{G}$, или с делителем $\mathfrak{G}$.

III. Найти прием для определения уравнений, группа которых изоморфна с $\mathfrak{G}$. Этот прием должен исчерпывать все уравнения этого рода, если его достаточно далеко продолжить.

2. Задача II всегда допускает решение в том случае, если для заданной группы имеет место теорема Люрота (P. Lüroth), которая носит также название теоремы *минимального рационального базиса*. Эту теорему можно формулировать так:

Если $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть поле рациональных функций от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то каждый

его делитель изоморфен с $K(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(m \leqslant n)$. (Можно еще выразиться: этот делитель *чисто трансцендентен*.)

Эту теорему Люрот (48) доказал для случая $n = 1$. Кастельнуово (G. Castelnuovo) (15) нашел ее доказательство для $n = 2$. Для случая $n = 3$ Фано (G. Fano) (21) и Энриквес (F. Enriques) (20) нашли противоречащий пример. Но для решения задачи II эта теорема не нужна в своем полном объеме. Если мы ограничимся случаем, когда исследуемый делитель поля содержит поле элементарно-симметрических функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то справедливость этой теоремы делается равносильной решаемости задачи II. Вопрос же о справедливости этой теоремы „в узком толковании“ до сих пор открыт [см. (74), примечание Ван-дер-Вардена (B. L. van der Waerden)]. Если же она и несправедлива в общем случае, то можно для каждой абстрактно задаваемой группы $\mathfrak{G}$ решать, является ли она „люротовой“ или нет, т. е. является ли поле $K(a_1, a_2, \ldots, a_n; \varphi)$ чисто трансцендентным, если $\mathfrak{G}$ представлена как группа подстановок над $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть элементарно-симметрические функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а φ—рациональная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащая к группе $\mathfrak{G}$.

3. Э. Нётер (E. Noether) (55) привела задачу I к задаче II, привлекши гильбертову теорему неприводимости (35), согласно которой в каждом неприводимом полиноме от многих переменных можно придать одной части переменных такие численные значения, чтобы получился полином, неприводимый от остальных переменных внутри любой заданной области рациональности.

Можно несколько усилить этот результат, приведя к задаче II не только задачу I, но также задачу

III. Для этого воспользуемся следующим приемом, предложенным М. Бауером (M. Bauer) (5, 6).

Известно, что группа Галуа $\mathfrak{G}$ алгебраического уравнения

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (2.1)$$

превращается в одну из своих подгрупп, если рассматривать величины области рациональности не абсолютно, а по модулю какого-нибудь простого числа (или простого идеала) этой области, т. е. если заменить эту область рациональности ее дополнительной областью (16, 70, 79). С другой стороны, известно, что группа Галуа сравнения по простому модулю есть циклическая группа, производящая подстановка которой состоит из циклов, порядки которых равны степеням неприводимых множителей нашего сравнения. Отсюда следует: если имеет место

$$f(x) \equiv X_{n_1}^{(p)} X_{n_2}^{(p)} \ldots X_{n_k}^{(p)} \pmod{p}, \quad (2.2)$$

где $X_{n_i}^{(p)}$ есть неприводимый по модулю p полином степени n_i ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), то группа уравнения (2.1) содержит подстановку, состоящую из циклов порядков $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

4. Допустим, что поле $K(a_1, a_2, \ldots, a_n; \varphi)$ чисто трансцендентное (см. обозначения п. 2). Это значит, что существуют рациональные функции $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ от $a_1, a_2, \ldots, a_n, \varphi$ такого рода, что, и, обратно, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \varphi$ рационально выражаются через $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$. Пусть теперь $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_s$ будет такая система делителей группы $\mathfrak{G}$, что всякий настоящий делитель группы $\mathfrak{G}$ является также делителем по крайней мере одной из групп $\mathfrak{G}_i$. Такую

систему всегда можно построить, беря, например, в качестве $\mathfrak{G}_i$ все настоящие делители группы $\mathfrak{G}$.

Пусть φ_i — принадлежащая к $\mathfrak{G}_i$ функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($i = 1, 2, \ldots, s$), и $F_i(z_i)$ — полином наименьшей степени, коэфициенты которого рационально выражаются через $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, а корнем служит φ_i ($i = 1, 2, \ldots, s$). Ясно, что степень $F_i(z_i)$ равна индексу $(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, s$).

Группа уравнения $F_i(z_i) = 0$, будучи транзитивной группой подстановок, содержит подстановку $\overline{S}_i$, перемещающую все цифры. Этой подстановке соответствует по крайней мере одна подстановка из $\mathfrak{G}$. Пусть это будет S_i, и пусть ее циклы будут порядков $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Возьмем любое простое число $p_i > n - 2$ и положим

$$f(x) \equiv X_{n_1}^{(p_i)} X_{n_2}^{(p_i)} \ldots X_{n_k}^{(p_i)} \pmod{p_i}, \quad (2.3)$$

где $X_{n_j}^{(p_i)}$ обозначает неприводимый по модулю p_i полином степени n_j. Это дает возможность определить коэфициенты с точностью до кратности модуля p_i. Подставив выражения для a_i в выражения коэфициентов уравнения $F(z) = 0$, получим сравнение

$$F(z) \equiv 0 \pmod{p_i},$$

имеющее непременно один или несколько рациональных корней. Пусть φ_i — один из этих корней и пусть φ_i переходит в другие рациональные корни при помощи некоторых подстановок $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\nu$ симметрической группы $\mathfrak{S}$ от n величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Условие (2.3) определяет „широкий класс“ подстановки, к которой принадлежит p_i, т. е. совокупность всех подстановок, подобных S_i внутри $\mathfrak{S}$. Если же мы, кроме того, закрепим класс сравнения корня φ_i,

то тем самым определим отдел (Abteilung) S_i внутри $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{A}$ есть отдел подстановки S_i, то

$$\Sigma_1^{-1}\mathfrak{A}\Sigma_1, \Sigma_2^{-1}\mathfrak{A}\Sigma_2, \ldots, \Sigma_\nu^{-1}\mathfrak{A}\Sigma_\nu$$

являются как раз теми отделами группы $\mathfrak{G}$, которые имеют цикленный тип подстановки S_i. Одному из этих отделов должна соответствовать выбранная нами подстановка $\overline{S}_i$. Если подставить значения $\varphi_i^{\Sigma_j}$ ($j = 1, 2, \ldots, \nu$) в выражения коэфициентов уравнения $F_i(z_i) = 0$, то по крайней мере одно из полученных таким образом сравнений $F_i(z_i) \equiv 0 \pmod{p_i}$ соответствует подстановке $\overline{S}_i$ и потому не имеет рациональных корней. Таким образом p_i принадлежит в $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к классу подстановок, не содержащихся в $\mathfrak{G}_i$.

Придавая i значения $1, 2, \ldots, s$, мы получим для $a_1, a_2, \ldots, a_n, \varphi$, а потому и для $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, классы сравнений по модулю $P = p_1 p_2 \ldots p_s$. Закрепив определенные значения π_i внутри этих классов и подставляя их в выражения коэфициентов уравнения $f(x) = 0$, мы придем к уравнению, группа которого есть в точности $\mathfrak{G}$. Действительно, в силу параметрического выражения коэфициентов a_i она содержится в $\mathfrak{G}$; с другой стороны, в силу упомянутых сравнений она не может содержаться ни в одной из групп $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_s$.

5. В частности, для построения уравнений без аффекта можно, следуя М. Бауеру, выбрать три простых числа p, q, r ($r \geqslant n-2$) и заставить полином $f(x)$ удовлетворить следующим трем сравнениям:

$$f(x) \equiv X_n^{(p)} \pmod{p},$$
$$f(x) \equiv X_{n-1}^{(q)}(x-b) \pmod{q},$$
$$f(x) \equiv X_2^{(r)}(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_{n-2}) \pmod{r}.$$

Группа уравнения $f(x) = 0$ содержит n-членный цикл, $(n-1)$-членный цикл и транспозицию и потому является симметрической группой (5, 6, 79).

6. Изложенный в п. 4 прием позволяет исчерпать все возможные уравнения с группой $\mathfrak{G}$, если его достаточно продолжить. Это вытекает из следующего результата Фробениуса (G. Frobenius) (23):

Если группа уравнения $f(x) = 0$ содержит подстановку из циклов порядков $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ($\Sigma n_i = n$), то существует бесчисленное множество таких простых чисел p, что сравнение $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ распадается на неприводимые множители степеней $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Несколько неопределенное выражение „все уравнения“ может быть уточнено, если мы поставим себе задачу нахождения всех уравнений с группой $\mathfrak{G}$, коэфициенты которых не превосходят некоторой границы. Для этого необходимо уточнить результат Фробениуса следующим образом:

Найти границы, внутри которых наверное существует заданное число простых чисел требуемого свойства.

Такие границы были получены Кронекером (L. Kronecker) (42) и Мертенсом (F. Mertens) (49) для случая арифметических прогрессий. Н. Чеботарев (81) провел подобную оценку их для задачи Фробениуса. Здесь результат таков. Если

$$x = \max\left\{2^{\left(\frac{2A_d}{g_d h_d} + 2W\right)^{\frac{1}{a}}}\right\} \text{ для всех } d \mid f, \qquad (2.4)$$

то в интервале $(1, x)$ наверное содержится V простых чисел, принадлежащих к отделу подстановки S.

Константы A_d, g_d, h_d, W зависят от некоторых делителей поля K и от числа V. Чтобы выразить явно эту границу через коэфициенты уравнения (2.1), необходимо уметь оценивать некоторые константы поля K. Совсем недавно Ремак (R. Remak) (61) нашел верхнюю и нижнюю границы для регулятора поля, что особенно важно для оценки границы (2.4).

7. Для решения задачи I нет необходимости в решаемости люротовой задачи. Если $F(\varphi) = 0$ — уравнение, которому удовлетворяет функция φ, принадлежащая к группе $\mathfrak{G}$, то коэфициенты полинома $F(\varphi)$ суть рациональные функции от коэфициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уравнения $f(x) = 0$. Условие

$$f(x) \equiv X_{n_1}^{(p_j)} X_{n_2}^{(p_j)} \ldots X_{n_k}^{(p_j)} \pmod{p_j^{\lambda_j}}$$

определяет коэфициенты a_i по модулю p_j. Если подставить эти значения в сравнение $F(z) \equiv 0 \pmod{p_j}$, то оно должно иметь по крайней мере один рациональный корень. Если оно имеет несколько рациональных корней, то мы выберем среди них тот, который соответствует нужному нам отделу. Если j пробегает значения $1, 2, \ldots, s$, то тем самым $a_1, a_2, \ldots, a_n, \varphi$ определяются по модулям $p_1, p_2, \ldots, p_s$, т. е. по модулю $P = p_1 p_2 \ldots p_s$, а потому могут быть представлены в форме $a_i = a_i^{(0)} + Pt_i$, $\varphi = \varphi_0 + Pu$, где $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)}, \varphi_0$ обозначают константы. Подставляя эти выражения в уравнение $F(\varphi) = 0$, мы получим диофантово уравнение $\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n; u) = 0$. Таким образом задача приводится к решению этого уравнения. Обратим внимание на следующие свойства этого уравнения:

1) Оно всегда имеет решение в дробных рациональных числах. Именно, можно вместо a_i подставить элементарно-симметрические функции от n произвольных рациональных значений, так что решение имеет n „степеней свободы“.

2) Оно всегда имеет решение в целых p-адических числах при всяком p.

Решаемость уравнения $\Phi = 0$ не зависит от выбора принадлежащей к $\mathfrak{G}$ функции.

8. Решению рассмотренных задач для некоторых специальных групп было посвящено немало работ. В первую очередь упомянем работу Гильберта (D. Hilbert) (35), в которой задача I решена при помощи теоремы неприводимости для симметрических и знакопеременных групп. Эффективное же построение уравнений со знакопеременной группой было недавно почти полностью проведено И. Шуром (72). Именно, Шур показал, что в случае $n \equiv 0 \pmod 4$ уравнение

$$E_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 0$$

имеет группой Галуа знакопеременную группу. С другой стороны, он доказал, что при $n \equiv 1 \pmod 2$ уравнение

$$1 - \binom{n}{1}\frac{x}{2!} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{3!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!} = 0$$

тоже имеет группой Галуа знакопеременную группу [1]).

9. При решении задачи II важно уметь решать задачу Люрота при помощи рациональных функций с рациональными коэфициентами. Этому вопросу для случая разрешимых групп простой степени посвящены работы Бройера (S. Breuer) (10, 11) и Фуртвенглера

[1]) I. Schur, Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und der Hermiteschen Polynome, Journ. f. Math., 165, стр. 52—58, 1931.

(Ph. Furtwängler) (27). Фуртвенглер нашел для случая циклических групп простой степени p следующий достаточный критерий:

Задача допускает решение, если возможно найти такую систему чисел $e_0, e_1, \ldots, e_{p-2}$, чтобы 1) определитель Ганкеля

$$\begin{vmatrix} e_0 & e_1 & \ldots & e_{p-2} \\ e_{p-2} & e_0 & \ldots & e_{p-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & e_2 & \ldots & e_0 \end{vmatrix} = \pm p,$$

2) имели место сравнения $\sum_{i=0}^{p-2} e_i g^i \equiv 0 \pmod{p}$, где g есть первообразный корень простого числа p.

Этот критерий не выполняется, например, для $p = 47$. В конце статьи Фуртвенглер дает несколько общих правил построения минимальных рациональных базисов для метациклических групп.

Бройер вывел несколько подобных критериев, воспользовавшись своей теоремой о распадении поля рациональных функций от n переменных на два делителя, из которых один зависит от полной метациклической функции.

10. Задачи I и III могут быть распространены на относительные поля. Прежде всего задача III может считаться решенной для относительных полей, если рациональный базис имеет коэфициенты не рациональные, а зависящие от некоторых корней из единицы [см., например, Фишер (E. Fischer) (22)]. Но это по существу не является обобщением задачи. Решение задач I и III может только тогда считаться удовлетворительным обобщением этих задач на относительные поля, когда мы можем также кое-что сказать относительно абсолютной группы Галуа.

Можно указать на работы Оре (O. Ore) (57) и Гассе (H. Hasse) (30, 31), как на первые работы в этом направлении, хотя они и не связаны непосредственно с упомянутыми задачами. Гассе кладет в основу поле $\mathfrak{k}$ и некоторое число его простых идеалов $\mathfrak{p}_i$ и находит бесконечное число содержащих поле $\mathfrak{k}$ полей K (Oberkörper), внутри которых идеалы $\mathfrak{p}_i$ разлагаются на простые идеалы заданным образом. Далее, он существенно усиливает этот результат, задавая разложение *регулярным* и требуя, чтобы поле $K/\mathfrak{k}$ было относительно абелевым. Он дает доказательство существования при некоторых ограничивающих предположениях.

11. Общая задача I для относительных полей может быть формулирована так [см. (84)]:

Задача A. Задано поле $\mathfrak{k}$, имеющее группу $\mathfrak{g}$. Кроме того, задана абстрактная группа $\mathfrak{G}$ с нормальным делителем $\mathfrak{H}$ так, что дополнительная группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ изоморфна с $\mathfrak{g}$. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы существовало поле K, содержащее $\mathfrak{k}$ и имеющее группу, изоморфную с $\mathfrak{G}$.

Нижеследующий пример показывает, что эта задача в некоторых случаях не имеет решения. Пусть $\mathfrak{k}$ — циклическое поле простой степени l, $\mathfrak{G}$ — циклическая группа порядка l^2. Пусть, далее, *критические простые числа* поля $\mathfrak{k}$ будут $\equiv 1 \pmod{l}$, но не $\equiv 1 \pmod{l^2}$. Из *арифметической теоремы монодромии* следует, что K должно иметь по меньшей мере одну группу инерции порядка l^2 [см. (82)]. Соответствующее этой группе инерции критическое простое число p должно быть критическим и внутри $\mathfrak{k}$, что невозможно, так как, как известно, оно удовлетворяет сравнению $p \equiv 1 \pmod{l^2}$.

Этот пример показывает также, что решаемость задачи A определяется не только одной структурой группы $\mathfrak{G}$, но также и некоторыми арифметическими свойствами поля $\mathfrak{k}$.

12. Шольц (A. Scholz) (63, 64) получил для задачи A по отношению к абелевым группам особенно важные результаты. Его исследования касаются, главным образом, *двустепенных групп* (т. е. групп с абелевыми коммутантами) и идут в двух направлениях. Во-первых, он провел очень целесообразную классификацию двустепенных групп. Самый простой тип из выделенных им групп, *диспозиционная группа*, допускает решение задачи A независимо от арифметических свойств поля $\mathfrak{k}$ (63). Можно определить диспозиционную группу как такую группу $\mathfrak{G}$, у которой абелев нормальный делитель $\mathfrak{H}$ есть прямое произведение циклических групп, сопряженных друг с другом. Кроме того, каждая из этих циклических групп не имеет нормализатора вне $\mathfrak{H}$.

Шольц доказал для диспозиционных групп две следующие теоремы:

1) Диспозиционная группа $\mathfrak{G}$ вполне определяется заданием группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ и порядка производящего элемента группы $\mathfrak{H}$.

2) Если заданы алгебраическое поле $\mathfrak{k}$ и его группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, то всегда можно найти поле K, содержащее $\mathfrak{k}$, группа которого изоморфна с $\mathfrak{G}$.

Впоследствии (65) Шольц распространил первую из этих теорем на случай, когда ни $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ ни $\mathfrak{H}$ не абелевы, а совершенно произвольны.

Во-вторых, Шольц подробно исследовал другие возможные типы двустепенных групп (64). Именно, он нашел среди всех двустепенных групп два *максимальных типа* групп (т. е. такие типы, что всякая двустепенная группа может быть представлена как

дополнительная группа произведения групп этих типов): *кольцевые группы* (Ringgruppen) и *ветвистые группы* (Zweiggruppen). Кольцевые группы всегда могут быть представлены как дополнительные группы некоторых степеней диспозиционных групп. Ветвистые же группы обладают одним свойством, которое не допускает такого представления: их наибольшие абелевы нормальные делители совпадают с коммутантами. В связи с этим вопрос о существовании относительных полей с ветвистыми группами остается открытым.

13. Задаче A посвятил также работу Н. Чеботарев (84). В ней он несколько обобщил понятие диспозиционной группы, отбросив требование, чтобы производящий циклический делитель группы $\mathfrak{H}$ не имел нормализатора вне $\mathfrak{H}$. Вводимые таким образом *шольцевы группы* соответствуют чисто разветвляющимся (т. е. не содержащим неразветвляющихся над $\mathfrak{k}$ полей) полям с относительными дискриминантами, простые идеальные множители которых внутри $\mathfrak{k}$ не являются критическими. Вопрос о единственности шольцевой группы $\mathfrak{G}$, если заданы ее дополнительная группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, порядок производящего элемента группы $\mathfrak{H}$ и его нормализатор, остается открытым. Вопрос о существовании относительных полей с заданной шольцевой группой приводится к вопросу о существовании главных простых идеалов $\mathfrak{p}$ с заданными значениями гассевского символа норменного вычета $\left(\frac{p, K}{\mathfrak{p}}\right)$ [см. Гассе (32, II)]. Этот вопрос выходит из рамок известной до сих пор аналитической теории идеалов.

14. Если группа $\mathfrak{G}$ не принадлежит к типу шольцевых групп, то можно ожидать существования соответствующего ей поля только тогда, если оно или будет содержать *частичное абсолютное поле классов*

(Teilklassenkörper) или его относительно критические простые идеалы будут также критическими внутри $\mathfrak{k}$. В этом случае мы находимся в полной власти индивидуальных особенностей поля $\mathfrak{k}$.

Группы абсолютного поля классов также не могут быть вполне произвольными. С одной стороны, их структура ограничивается уже упоминавшейся теоремой монодромии, в силу которой все группы инерции при композиции воспроизводят всю группу Галуа поля, в то время как группы инерции относительно неразветвляющегося поля допускают взаимно однозначное отображение на группы инерции поля $\mathfrak{k}$. Чеботарев (82), исходя из этого принципа, провел классификацию возможных групповых типов абсолютных полей классов. С другой стороны, Полячек (F. Pollaczek) (60) и Шольц (66) нашли и разработали ограничения для абсолютного поля классов, вызываемые свойствами основной системы единиц.

§ 3. *ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ К ЗАДАННОМУ КЛАССУ ПОДСТАНОВОК*

1. Как известно, алгебраическое поле не определяется вполне своей группой Галуа. Известные нам инварианты, вполне определяющие поле, суть так называемые артиновские символы $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$ (32, II, стр. 6), т. е. классы подстановок, к которым принадлежат отдельные простые числа. Число этих инвариантов бесконечно, откуда следует, что они не независимы друг от друга. Можно выве ти существующие между ними соотношения, если знать аналитическую форму, в которой могут быть представлены простые числа, принадлежащие к тем или другим классам подстановок,

т. е. соответствующие одному и тому же значению символа $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right)$. Оказывается, что такие аналитические выражения зависят от структурных особенностей группы $\mathfrak{G}$ этого поля. Эта связь глубоко вскрывает арифметическую структуру поля с известной группой Галуа.

2. Прежде всего упомянем классический случай абелевого поля. Чтобы простое число принадлежало к заданной подстановке (в этом случае класс подстановок состоит только из одной подстановки), оно должно заключаться в одной из нескольких арифметических прогрессий $ax + b$, однозначно соответствующих подстановке группы Галуа. Число a одно и то же для всех подстановок и состоит из простых чисел, входящих в дискриминант поля, в то время как числа b различны для различных подстановок.

3. Дальнейший случай, тоже сделавшийся классическим, соответствует *комплексному умножению эллиптических функций*. Если поле относительно абелево над мнимым квадратичным полем, то всякое простое число, принадлежащее к заданному классу подстановок, может быть представлено в виде одной или нескольких положительных квадратичных форм, дискриминант которых зависит от поля (точнее, равен дискриминанту мнимого квадратичного поля) и классы которых соответствуют классам подстановок.

4. Это обстоятельство было предсказано Кронекером („мечта юности“) и доказано Фуэтером (R. Fueter) (24, 25). Принципы, на которых оно основано, вытекают из общей теории полей классов. Именно, если считать главными идеалами только те числа поля $\mathfrak{k}$, которые удовлетворяют определенным сравнениям по модулю идеала $\mathfrak{f}$ (называемого *вожаком*), и h есть число идеальных классов в новом смысле, то существует над $\mathfrak{k}$ относительно абелево поле K

относительной степени h, так называемое *поле классов*, которое обладает тем свойством, что простые идеалы поля $\mathfrak{k}$ распадаются в K на простые идеалы полностью тогда и только тогда, если они лежат в главном классе [Фуртвенглер (26); Такаги (T. Takagi) (76)]. Обратно, всякое абелево относительно $\mathfrak{k}$ поле можно считать полем классов с соответственно выбранным вожаком [Фуэтер (24); Такаги (76); Гассе (32)].

5. Поставим общий вопрос об аналитической форме простых чисел, принадлежащих к классам, соответствующим степеням подстановки S. Пусть K — нормальное алгебраическое поле и $\mathfrak{G}$ — его группа. Пусть, далее, S — какая-нибудь подстановка из $\mathfrak{G}$. Чтобы простое число p принадлежало к одному из классов, образованных степенями подстановки S, необходимо и достаточно, чтобы принадлежащий к $\mathfrak{Z}_S$ делитель K_S поля K содержал простой идеальный множитель $\mathfrak{p}$ первой степени числа p, причем $\mathfrak{Z}_S$ есть циклический делитель группы $\mathfrak{G}$, образованной степенями S.

Пусть $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_h$ будет система представителей всех различных идеальных классов поля K_S, и пусть $(\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \ldots, \mu_n^{(i)})$ будет базис идеала $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$. Тогда $N(\mu_1^{(i)}x_1 + \mu_2^{(i)}x_2 + \ldots + \mu_n^{(i)}x_n)$ есть (разложимая) форма n-й степени от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, коэфициенты которой имеют общими множителями числа $N(\mathfrak{a}_i)$. Частное

$$\frac{N(\mu_1^{(i)}x_1 + \mu_2^{(i)}x_2 + \ldots + \mu_n^{(i)}x_n)}{N(\mathfrak{a}_i)} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, h) \qquad (3.1)$$

есть таким образом примитивная форма n-й степени. Придавая переменным x_i всевозможные целые рациональные значения, мы будем получать в качестве значений $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нормы всех идеалов противоположного классу $\mathfrak{a}_i$ класса. Действительно, если $\mathfrak{b}$ лежит в классе, противоположном классу $\mathfrak{a}_i$, то $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ есть главный идеал. Пусть он *ассоциирован* (т. е. отличается единичным множителем) с числом $\mu_1^{(i)}x_1 + \mu_2^{(i)}x_2 + \ldots + \mu_n^{(i)}x_n$ идеала $\mathfrak{a}_i$. Тогда имеет место

$$N(\mathfrak{b})N(\mathfrak{a}_i) = N(\mu_1^{(i)}x_1 + \mu_2^{(i)}x_2 + \ldots + \mu_n^{(i)}x_n) = N(\mathfrak{a}_i)f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Если $\mathfrak{p}$ есть простой идеал первой степени поля K_S, так что, стало быть, имеет место $N(\mathfrak{p}) = p$, то мы находим того представителя $\mathfrak{a}_i$, класс которого противоположен классу $\mathfrak{p}$. Тогда p может быть представлено в форме $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обратно, если p представляется в форме $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $N(\mathfrak{a}_i)p$ представляется в форме $N(\mu_1^{(i)}x_1 + \mu_2^{(i)}x_2 + \ldots + \mu_n^{(i)}x_n)$. Число $\mu_1^{(i)}x_1 + \mu_2^{(i)}x_2 + \ldots + \mu_n^{(i)}x_n$ делится на $\mathfrak{a}_i$, и норма идеала-частного $\dfrac{\mu_1^{(i)}x_1 + \mu_2^{(i)}x_2 + \ldots + \mu_n^{(i)}x_n}{\mathfrak{a}_i}$ равна p. Отсюда следует, что существует идеал с нормой p. Этот идеал должен быть простым идеалом первой степени.

6. Чтобы найти условие принадлежности простого числа p к *отделу* подстановки S, мы должны исключить его принадлежность к степеням S^k, показатели которых не взаимно просты с порядком f подстановки S. Таким образом p должно в K_S содержать по крайней мере один простой идеал первой степени, в то время как это не должно иметь места для полей K_{S^k} при $(k, f) \neq 1$. Если

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots \qquad (3.2)$$

суть формы, соответствующие полям K_{S^k} и построенные так же, как форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то p принадлежит к отделу подстановки S тогда и только тогда, если оно может быть представлено при помощи одной из форм (3.1), но не при помощи одной из форм (3.2).

7. Как можно характеризовать принадлежность простого числа p к *классу* подстановки S? Я могу сделать это только тогда, если я знаю такое число a, что $p^f \equiv 1 \pmod a$, но не $p^{f_1} \equiv 1 \pmod a$ при $f_1 < f$. Внутри делителя f-й степени $K(\eta)$ поля a-х корней из единицы p остается неразложимым. Если $p \equiv b \pmod a$, то имеет место $\eta^p \equiv \eta^b \pmod p$. Рассмотрим величину

$$\xi = \eta\omega + \eta^b\omega^S + \ldots + \eta^{b^{f-1}}\omega^{S^{f-1}},$$

где ω — величина поля K, и уравнение $\Phi(\xi) = 0$, которому удовлетворяет ξ. Если мы уже установили, что p принадлежит к *отделу* подстановки S, то p принадлежит к *классу* S тогда и только тогда, если сравнение $\Phi(\xi) \equiv 0 \pmod p$ имеет рациональные корни, т. е. p имеет в $K(\xi)$ хотя бы один простой идеальный множитель первой степени. Таким образом можно построить такую систему форм, что p представляется через одну из них тогда и только тогда, если оно лежит в классе S. Для каждого p можно, конечно, найти соответствующее число a; однако различным p соответствуют различные формы. В связи с этим я не умею находить конечного числа форм, которые бы годились для всех простых чисел.

8. Из описанного критерия не вытекают рассмотренные в пп. 2, 3 классические критерии. Чтобы построить более общий критерий, рассмотрим случай, когда $\mathfrak{G}$ содержит абелев нормальный делитель $\mathfrak{H}$. Тогда можно считать K относительно абелевым полем над полем $\mathfrak{k}$, принадлежащим внутри K к $\mathfrak{H}$. В силу *общего закона взаимности Артина* (E. Artin) (2) между подстановками группы $\mathfrak{H}$ и идеальными классами (точнее, между смежными классами по какой-нибудь подгруппе группы идеальных классов) поля $\mathfrak{k}$ имеет место взаимно однозначное соответствие, имеющее характер изоморфизма. Поэтому формы (3.1), соответствующие полю $\mathfrak{k}$, распадаются на системы форм $\mathfrak{B}_i$, каждая из которых соответствует одному из упомянутых смежных классов. Число этих систем форм равно порядку группы $\mathfrak{H}$. В силу артиновского закона взаимности простое число p представляется через одну из форм системы $\mathfrak{B}_i$ тогда и только тогда, если оно принадлежит к классу S_i, где S_i — подстановка группы $\mathfrak{H}$, соответствующая системе $\mathfrak{B}_i$. Эта система форм имеет то преимущество, что степени ее форм вообще ниже. Если, например, K абсолютно абелево, то $\mathfrak{k}$ есть поле рациональных чисел, так что нормы просто совпадают с самими числами. Подразделение чисел рационального поля есть не что иное, как их подразделение на классы сравнений по модулю, называемому *вожаком*. Если $\mathfrak{k}$ — квадратичное поле, то мы приходим к квадратичным формам, в полном согласии с общей теорией.

9. Заметим, что формы, соответствующие полю $\mathfrak{k}$, допускают так называемую композицию форм. Если, например,

$$N(\mathfrak{a}) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$N(\mathfrak{b}) = f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

то

$$N(\mathfrak{ab}) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

С другой стороны, если $\mathfrak{ab}$ лежит, скажем, в идеальном классе, противоположном классу идеала $\mathfrak{a}_3$, то $N(\mathfrak{ab}) = f_3(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — неко-

торые целочисленные билинейные выражения относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Мы получим их, если в билинейном выражении $\sum_{i,j} \mu_i^{(1)} \mu_j^{(2)} x_i x_j$, где $(\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}, \ldots, \mu_n^{(1)})$, $(\mu_1^{(2)}, \mu_2^{(2)}, \ldots, \mu_n^{(2)})$ — базисы идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, выразим $\mu_i^{(1)} \mu_j^{(2)}$ через базис $(\mu_1^{(3)}, \mu_2^{(3)}, \ldots, \mu_n^{(3)})$ идеала $\mathfrak{ab}$: $\mu_i^{(1)} \mu_j^{(2)} = \sum_s c_{ij}^s \mu_s^{(3)}$, откуда

$$\mathfrak{ab} = \sum_{i,\,j,\,s} c_{ij}^s x_i x_j \mu_s^{(3)},$$

и обозначим коэфициенты при $\mu_s^{(3)}$ через z_s:

$$z_s = \sum_{i,\,j} c_{ij}^s x_i y_j.$$

Легко понять, что эта композиция форм соответствует умножению соответствующих им идеальных классов.

10. Чтобы получить наиболее простую аналитическую форму для простых чисел, принадлежащих к различным классам подстановок в заданном поле, следует найти наибольший абелев нормальный делитель его группы $\mathfrak{G}$. Для этого заметим, что подстановка S из $\mathfrak{G}$ может содержаться в абелевом нормальном делителе группы $\mathfrak{G}$ только тогда, если *ее класс абелев*, т. е. если все подстановки ее класса перестановочны друг с другом. Если $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_k$ — совокупность всех абелевых классов группы $\mathfrak{G}$, то каждый абелев нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$ состоит из тех подстановок этих классов, которые также между собой перестановочны. Если, например, $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ перестановочны, то их *огибающая*, т. е. наименьшая содержащая их группа, является абелевым нормальным делителем группы $\mathfrak{G}$. На единственность наибольшего абелева нормального делителя нельзя рассчитывать, так как перестановочность не есть транзитивное свойство.

Нижеследующий пример показывает, что действительно бывают случаи, когда $\mathfrak{G}$ имеет несколько различных наибольших абелевых нормальных делителей. Пусть $\mathfrak{G}$ задана тремя производящими элементами S_1, S_2, S_3, связанными соотношениями $S_1^p = S_2^p = S_3^p = 1$, $S_1 S_2 = S_2 S_1$, $S_1 S_3 = S_3 S_1$, $S_2 S_3 = S_3 S_2 S_1$ (p — простое число). Обе подгруппы (S_1, S_2) и (S_1, S_3) суть абелевы нормальные делители группы $\mathfrak{G}$. Обе максимальны, так как единственная группа, заключающая одну из них как часть, есть $\mathfrak{G}$. С другой же стороны, они отличны друг от друга.

11. В качестве примера рассмотрим кубическое поле K общего типа. К его знакопеременной группе $\mathfrak{H}$ принадлежит квадратичное поле $\mathfrak{k}$, и по теории Фуэтера-Такаги можно рассматривать K как (кольцевое) поле классов от $\mathfrak{k}$. Рассматриваемым кольцевым классам поля $\mathfrak{k}$ соответствует система бинарных квадратичных форм, распадающаяся на три подсистемы $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$, из которых каждая соответствует одной из трех подстановок группы $\mathfrak{H}$. Если D есть дискриминант форм этой системы, то $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$ есть необходимое и достаточное условие того, чтобы p представлялось при помощи одной из этих форм. Назовем ту из систем $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$, скажем $\mathfrak{B}_1$, для которой имеет место $\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1$, *главной системой*. Тогда все простые числа, взаимно простые с дискриминантом поля K, распадаются на три следующие категории:

1) $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$; p не принадлежит к $\mathfrak{H}$, т. е. принадлежит к транспозициям.

2) $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$; p представляется одной из форм $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$; p принадлежит к одному из трехчленных циклов.

3) $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$; p представляется одной из форм $\mathfrak{B}_1$; p принадлежит к тождественной подстановке.

В этом направлении кубическое поле изучали Дедекинд (17), Г. Вороной (85) и Такаги. Недавно Гассе (33) исследовал кубическое поле при помощи теории полей классов, рассмотрев также и критические простые идеалы. На эту задачу любезно обратил мое внимание Б. Делоне.

12. Упомяну еще про один весьма элегантный прием Шпайзера (A. Speiser) (73), служащий для определения порядка подстановки, к классу которой принадлежит заданное простое число p. Я позволю себе несколько изменить доказательство. Пусть

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots \\ \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (3.3)$$

будет заданное уравнение. Рассмотрим разностное уравнение

$$y(m+n) + a_1 y(m+n-1) + \ldots \\ \ldots + a_{n-1} y(m+1) + a_n y(m) = 0. \qquad (3.4)$$

Его решение, как известно, имеет вид

$$y(m) = C_1 \alpha_1^m + C_2 \alpha_2^m + \ldots + C_n \alpha_n^m, \qquad (3.5)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корни уравнения (3.3), а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные константы. Полагая $y(1) = y(2) = \ldots = y(n-1) = 0$, $y(n) = 1$, мы получим $C_i = \frac{1}{f'(\alpha_i)}$. Будем считать $GF[p^f]$ основным

полем. Если u есть наименьший (целочисленный) период функции $y(m)$ по модулю p, то имеет место $\alpha_i^u \equiv 1 \pmod p$, и обратно. В самом деле, из $y(u) \equiv y(u+1) \equiv \ldots \equiv y(u+n-1) \equiv 0$, $y(u+n) \equiv 1 \pmod p$ следует $C_i \equiv \frac{1}{\alpha_i^u f'(\alpha_i)} \pmod p$, т. е. $\alpha_i^u \equiv 1 \pmod p$. Но так как $(\alpha_i \to \alpha_i^p)$ есть производящая подстановка группы Галуа сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod p$, а потому ее порядок равен наименьшему числу, для которого имеет место $\alpha_i^{p^f} \equiv \alpha_i \pmod p$, то f равно наименьшему показателю, для которого имеет место $p^f \equiv 1 \pmod u$.

13. Недавно Гассе (34, 9) поставил вопрос об арифметической структуре числовых полей на совершенно новую почву, связав теорию числовых полей с так называемыми „*алгебрами*“ (т. е. *гиперкомплексными системами*). Каждому полю соответствует „циклическая“ гиперкомплексная система, введенная Э. Нётер под названием *скрещенное произведение* (verschränktes Produkt). Но так как, обратно, каждой циклической алгебре соответствует много полей с различными группами Галуа, и, в частности, циклические поля, то тем самым арифметические свойства полей приводятся в теснейшую связь с арифметическими свойствами циклических полей.

§ 4. *ПРОБЛЕМА РЕЗОЛЬВЕНТ*

1. В общей теории алгебраических полей существует вопрос, содержащий проблему резольвент как частный случай:

Задано поле K рациональных функций от нескольких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найти его

истинную степень трансцендентности по отношению к некоторому его делителю $\mathfrak{k}$, т. е. наименьшее число m такого рода, что K может быть представлено как прямое произведение поля алгебраических функций от m переменных, входящих в K, и некоторого делителя поля $\mathfrak{k}$ (см. ниже, § 5).

Чтобы выяснить связь этого вопроса с проблемой резольвент, рассмотрим поле K всех рациональных функций от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в то время как $\mathfrak{k}$ пусть образовано элементарно-симметрическими функциями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ от этих переменных. Требуется найти уравнение n-й степени (*резольвенту*), коэфициенты которого суть рациональные функции от $a_1, a_2, \ldots, a_n$, среди которых число m функционально независимых возможно мало, и корни которого образуют вместе с $a_1, a_2, \ldots, a_n$ все поле K. Другими словами, вопрос идет о чирнгаузеновом преобразовании уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (4.1)$$

с неограниченно переменными коэфициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в уравнение, коэфициенты которого имели бы возможно меньшее число степеней свободы.

Целесообразно расширить задачу, включая в *поле коэфициентов* $\mathfrak{k}$ также иррациональные функции от $a_1, a_2, \ldots, a_n$, имеющие, однако, не бóльшую чем m истинную степень трансцендентности; например $\sqrt{D}$, где D — дискриминант уравнения (4.1).

Эту задачу можно считать естественным обобщением первоначальной основной задачи теории Галуа, решения в радикалах. В самом деле, представление корней в радикалах имеет то преимущество, что оно позволяет находить корни при помощи цепи операций, каждая из которых имеет дело только

с одной переменной. Поэтому можно осуществить таблицу, сопоставляющую с каждой подрадикальной величиной радикал, и такие таблицы позволят нам вычислить корни всех разрешимых уравнений заданной степени.

2. Только что упомянутое свойство характерно не только для разрешимых уравнений. Можно осуществлять нахождение корней уравнений посредством операций совсем другого рода, лишь бы каждая из них обладала этим свойством. Упомянем прежде всего общее уравнение пятой степени. Уже давно известно [Бринг (Bring) (12)], что его можно привести к так называемой бринг-жерардовской форме

$$y^5 + py + q = 0, \qquad (4.2)$$

применяя к нему чирнгаузеново преобразование, коэфициенты которого суть корни уравнений степеней $\leqslant 4$ и потому допускают представление в радикалах [см. Сильвестер (J. J. Sylvester) (75)]. С другой стороны, уже издавна была известна связь уранений пятой степени с проблемой деления периодов эллиптических функций (стало быть, аргумента модулярных функций) на пять. Это дает возможность решать общее уравнение пятой степени трансцендентным путем [см. (29, 86)].

3. Эта задача была решена Клейном (F. Klein) (41) способом, который бросает свет на общую проблему резольвент. Именно, он привел общее уравнение пятой степени к несколько другой нормальной форме:

$$y^5 + 15y^4 - 10\gamma y^2 + 3\gamma^2 = 0 \qquad (4.3)$$

при помощи только квадратичных иррациональностей $\sqrt{D}$ и $\sqrt{5}$.

Другая, значительно более важная заслуга Клейна для проблемы резольвент состоит в том, что он нашел внутреннюю причину того, что проблема резольвент имеет решение для уравнений пятой степени. Именно, он привел эту проблему к так называемой *проблеме форм*, которая состоит в следующем. Для наибольшей конечной группы $\mathfrak{G}$ бинарных линейных подстановок, группы икосаэдра, можно построить уравнение 60-й степени

$$(\theta^{30} + 522\theta^{25} - 10\,005\theta^{20} - 10\,005\theta^{10} - 522\theta^{5} + 1)^2 = \\ = z \cdot \theta^5 (\theta^{10} + 11\theta^5 - 1)^5, \qquad (4.4)$$

коэфициенты которого зависят от некоторой формы z переменных x_1, x_2, инвариантной относительно подстановок группы $\mathfrak{G}$, в то время как его корни переходят друг в друга посредством этих подстановок. Группа этого уравнения, являясь группой икосаэдра, изоморфна со знакопеременной группой пятой степени. Отсюда можно заключить, что всякое уравнение пятой степени может быть приведено к виду (4.4) [или также к виду (4.3)], если подвергнуть его рациональному преобразованию, коэфициенты которого могут содержать $\sqrt{D}$, где D — дискриминант этого уравнения.

Основная идея приведения уравнения пятой степени к однопараметрической резольвенте сводится к тому, что композиционный ряд симметрической группы пятой степени состоит из двух членов, из которых один есть группа второго порядка, а другой изоморфен с группой икосаэдра, которая может быть представлена как группа дробных линейных подстановок от одной переменной.

4. Эта идея была применена Клейном и к некоторым другим уравнениям, именно к имеющим группой Галуа простую группу порядка 168, которая может быть представлена как однородная линейная группа подстановок трех переменных.

Этой группе соответствует специальный класс уравнений седьмой степени. Так как однородная линейная группа подстановок трех переменных изоморфна с группой дробных линейных подстановок двух переменных, то можем точно так же заключить, что эти уравнения допускают двухпараметрическую резольвенту.

Несколько сложнее обстояло дело с уравнениями шестой степени. Знакопеременная группа не допускает представления однородными линейными подстановками трех переменных. Поэтому Клейн думал, что общие уравнения шестой степени не допускают двухпараметрической резольвенты, и искал для них трехпараметрическую резольвенту. Виман (A. Wiman) (89) указал, что, несмотря на это, эта группа допускает представление дробными линейными подстановками от двух переменных. В самом деле, эту группу можно рассматривать как дополнительную группу от некоторой группы порядка 1080, которая может быть представлена как однородная линейная группа от трех переменных. Соответствующий ей нормальный делитель $\mathfrak{H}$ третьего порядка лежит в центре группы и потому в этом представлении представлен подстановками, умножающими переменные на корни третьей степени из единицы. Но отношения рассматриваемых переменных претерпевают при этом подстановки группы дробных линейных подстановок. Подстановки группы $\mathfrak{H}$ не оказывают на них никакого действия. В силу этого построенная таким образом группа дробных линейных подстановок изоморфна с дополнительной группой, т. е. со знакопеременной группой шестой степени.

5. Вопрос о представлении конечных групп дробными линейными подстановками был в общем виде изучен И. Шуром (69, 70). Оказалось, что эту задачу всегда можно решить при помощи конечного числа операций. Именно, чтобы найти все такого рода представления заданной конечной группы $\mathfrak{G}$, нужно найти соответствующую группе $\mathfrak{G}$ *группу представления* (Darstellungsgruppe) $\mathfrak{K}$, определяемую следующими свойствами:

I. $\mathfrak{G}$ должна быть изоморфна с дополнительной группой $\mathfrak{K}/\mathfrak{M}$.

II. $\mathfrak{M}$ должна лежать в центре группы $\mathfrak{K}$.

III. Коммутант группы $\mathfrak{G}$ совпадает с $\mathfrak{D}/\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{D}$ — коммутант группы $\mathfrak{K}$.

Каждой группе $\mathfrak{G}$ соответствует лишь конечное число различных групп представления $\mathfrak{K}$. Найдя все представления групп $\mathfrak{K}$ однородными линейными подстановками, мы получим при помощи каждого такого представления одно представление группы $\mathfrak{G}$ дробными линейными подстановками. Это является наиболее общим методом получения всех подобных представлений группы $\mathfrak{G}$.

6. Виман (90) изучил вопрос о представлении симметрической и знакопеременной групп высших степеней. Оказалось, что при $n \geqslant 8$ симметрические и знакопеременные группы не могут быть представлены однородными линейными подстановками менее чем от $n-1$ переменных.

7. Гильберт (36) поставил проблему („13-я проблема"), имеющую с описанной проблемой Клейна много точек соприкосновения. Будем считать корни уравнения (4.1) функциями от n переменных. Спрашивается, нельзя ли их представить как суперпозиции (т. е. функции от функций) от функций меньшего числа s переменных, а также рациональных операций.

Впоследствии (37) Гильберт нашел для $n \leqslant 9$ следующие значения:

n	5	6	7	8	9
$s \leqslant$	1	2	3	4	4

Виман (91) обобщил этот результат, показавши, что для всех $n \geqslant 9$ имеет место неравенство $s \leqslant n-5$, т. е. что можно, подвергнув общее уравнение степени $n \geqslant 9$ преобразованию Чирнгаузена, уменьшить число его переменных по крайней мере на пять.

8. Чеботарев (83) поставил себе задачей ближе исследовать связь между способностью уравнения к приведению переменных и представимостью его группы Галуа как группы преобразования от возможно меньшего числа переменных. Для этого он вводит следующее понятие *группы одевания*:

Если $\mathfrak{G}$ — заданная конечная группа, то непрерывая группа Γ называется *группой одевания* (г. о.) группы $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) Γ содержит, как делитель, изоморфную с $\mathfrak{G}$ группу.

2) Ни один настоящий (непрерывный) делитель группы Γ не обладает свойством 1).

3) Ни одна настоящая дополнительная группа группы Γ не обладает свойством 1).

Имеет место следующая теорема:

Алгебраическое уравнение с неограниченно переменными коэфициентами имеет резольвенту с s параметрами тогда и только тогда, если ее группа Галуа имеет г. о., которая может быть представлена в s-мерном пространстве.

Чтобы доказать первую часть этой теоремы, рассмотрим случай, когда группа $\mathfrak{G}$ проста, что достаточно для наших целей. Тогда всякая группа одевания группы $\mathfrak{G}$ тоже проста. В самом деле, если такая группа Γ имеет настоящий нормальный делитель Γ_1, то Γ_1 или содержит делителем всю группу $\mathfrak{G}$, или не имеет с $\mathfrak{G}$ кроме единицы общих элементов. В первом случае это противоречит условию 2); во втором случае дополнительная группа Γ/Γ_1 имеет изоморфный с $\mathfrak{G}$ делитель, что противоречит условию 3).

Более того, можно доказать следующее: если непрерывная группа Γ, содержащая как делитель конечную группу $\mathfrak{G}$, может быть представлена в s-мерном пространстве (будем для краткости говорить: является s-группой), то тот делитель дополнительной группы от группы Γ, который является г. о. группы $\mathfrak{G}$, есть тоже s-группа. Что делитель s-группы есть s-группа, очевидно. Чтобы доказать, что простая дополнительная группа s-группы есть тоже s-группа, вспомним теорему, впервые доказанную в общем виде Э. Э. Леви (E. E. Levi) (44):

> Если непрерывная группа Γ имеет простую дополнительную группу Γ_1, то она имеет также подгруппу, изоморфную с Γ_1.

9. Если $\mathfrak{G}$, трактуемая как группа преобразований корней, рассматриваемых как переменные, допускает г. о., не только изоморфную, но и *подобную* некоторой s-группе, то решение задачи получается непосредственно. Именно тогда можно найти s функций $z_1, z_2, \ldots, z_s$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые подвергаются преобразованиям изоморфной с Γ группы, если мы подвергаем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ преобразованиям группы Γ. При этом можно, в силу результатов Ли и Энгеля (S. Lie - F. Engel) (45, стр 522),

найти функции z_i рациональным путем, так как они образуют системы импримитивности группы Γ. Если группа Γ транзитивна, то можно в качестве z_i выбрать рациональные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В противном случае они зависят еще от иррациональности θ, зависящей от инвариантов группы Γ. Если считать, например, z_i рациональной функцией от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то все величины, сопряженные с z_i, порождают поле, совпадающее с $\mathfrak{k}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. С другой стороны, эти величины зависят только от $z_1, z_2, \ldots, z_s$, так как они образуются при производстве над z_i преобразований группы $\mathfrak{G}$, в то время как преобразования группы $\mathfrak{G}$ входят в группу Γ, которая преобразовывает z_i в функции от $z_1, z_2, \ldots, z_s$. Отсюда следует что z_i удовлетворяет уравнению, коэфициенты которого зависят только от s параметров, в то время как x_i рационально выражается через z_i.

10. Если г. о. Γ группы $\mathfrak{G}$ изоморфна с s-группой, но не подобна ей, то можно применить принцип Картана (E. Cartan) (14), состоящий в следующем:

> Если две непрерывные группы Γ и Γ_1 изоморфны, то можно так *расширить* группу Γ, чтобы можно было получить группу Γ_1, подвергая переменные преобразованиям группы Γ и рассматривая некоторые функции от этих переменных.

Под *расширением* же группы Γ будем разуметь следующее. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть переменные группы Γ, то введем в рассмотрение новые системы переменных:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(m-1)}, & x_2^{(m-1)}, & \ldots, & x_n^{(m-1)} \end{array}\right\} \qquad (4.5)$$

и расширенная группа получится, если одновременно подвергать каждую из систем

$$x_1^{(\lambda)},\ x_2^{(\lambda)},\ \ldots,\ x_n^{(\lambda)} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

преобразованиям исходной группы Γ.

Чтобы в этом случае построить s-параметрическую резольвенту, введем вместо $x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\lambda)}, \ldots, x_n^{(\lambda)} (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ новые переменные $a_0^{(\lambda)}, a_1^{(\lambda)}, \ldots, a_{n-1}^{(\lambda)}$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(\lambda)} &= a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} x_1 + \ldots + a_{n-1}^{(\lambda)} x_1^{n-1}, \\ x_2^{(\lambda)} &= a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} x_2 + \ldots + a_{n-1}^{(\lambda)} x_2^{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(\lambda)} &= a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} x_n + \ldots + a_{n-1}^{(\lambda)} x_n^{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

$(\lambda = 1, 2, \ldots, m-1)$. Подвергая переменные (4.5) преобразованиям U группы Γ, мы тем самым подвергнем $a_i^{(\lambda)}$ некоторым преобразованиям, которые будут превращаться в тождественные преобразования, если мы в роли U будем брать преобразования из $\mathfrak{G}$. Подставив эти выражения в одну из функций

$$z_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)};\ \ldots;\ x_1^{(m-1)}, x_2^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)}),$$

например z_1, испытывающих преобразования s-группы, если $x_i^{(\lambda)}$ подвергать преобразованиям группы Γ, мы придем к функциям

$$z_1,\ z_1^{S_1},\ \ldots,\ z_1^{S_{N-1}},$$

зависящим только от s параметров (здесь $\mathfrak{G} = 1 + S_1 + \ldots + S_{N-1}$). Так как при этих преобразованиях переменные $a_i^{(\lambda)}$ остаются инвариантными, то мы можем приписать им произвольные рациональные численные значения, заботясь лишь о том, чтобы ни одна из разностей $z_1^{S_i} - z_1 (i = 1, 2, \ldots, N-1)$ не обращалась в нуль. Таким образом получается резольвента Галуа с s параметрами. Чтобы перейти от нее к s-параметрическому уравнению, связанному с уравнением (4.1) чирнгаузеновым преобразованием, достаточно образовать функцию от $z_1^{S_i}$, принадлежащую к той же группе, что и x_1.

11. Не исключена возможность, что переход от x_i к z_i не рационален, а содержит иррациональность θ, зависящую от инвариантов расширенной группы Γ. Назовем неприводимое уравнение, которому удовлетворяет θ, *побочной резольвентой*. Возникает весьма существенный вопрос, не может ли побочная резольвента содержать больше существенных параметров, чем само уравнение (4.1). Теперь я не могу решить этого вопроса в общем случае. Известно лишь, что для симметрических $\mathfrak{G}$ побочная резольвента не содержит ни одного параметра, а для знакопеременных $\mathfrak{G}$ не более одного параметра.

12. Докажем теперь вторую часть теоремы, сформулированной в п. 8. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ будут все корни s-параметрической резольвенты уравнения (4.1), которое пусть задано в форме нормального уравнения. Величины z_i являются функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащими к единичной группе. Если подвергать x_i подстановкам группы $\mathfrak{G}$, то величины z_i претерпевают некоторые подстановки, образующие изоморфную с $\mathfrak{G}$ группу $\overline{\mathfrak{G}}$, которая отличается от $\mathfrak{G}$ только другим обозначением переменных.

Сначала будем считать $z_1, z_2, \ldots, z_n$ независимыми переменными и оденем $\overline{\mathfrak{G}}$ непрерывной группой Γ следующим образом: выберем из $\overline{\mathfrak{G}}$ систему подста-

новок $A, B, \ldots$, образующих при композиции всю группу $\mathfrak{G}$. Будем рассматривать каждую из этих подстановок, например A, как однородное линейное преобразование, и приведем ее в нормальную форму

$$u_i \to \varepsilon^{k_i} u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ — корень из единицы и u_i обозначают некоторые линейные функции от $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Будем считать

$$u_i \to e^{k_i t} u \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

одним из производящих преобразований группы Γ; оно превращается в A, если положить $t = \frac{2\pi i}{m}$. Возвращаясь обратно к исходным переменным $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и проделывая это со всеми образующими преобразованиями $A, B, \ldots$, мы получим непрерывную группу Γ, одевающую группу $\mathfrak{G}$. Γ, будучи линейной группой от n переменных, содержит лишь конечное число параметров.

Теперь будем считать величины z_i функциями от x_i, а x_i — координатами некоторого пространства $\mathfrak{R}$, причем две точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ будем считать совпадающими тогда и только тогда, если

$$z_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_i(x_1', x_2', \ldots, x_n') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Из того, что среди функций $z_1, z_2, \ldots, z_n$ имеется ровно s функционально независимых, следует, что пространство $\mathfrak{R}$ имеет s измерений. Группа Γ индуцирует в пространстве непрерывную группу, „локально изоморфную“ с Γ (67) и имеющую изоморфный с $\mathfrak{G}$ делитель, так как, например, z_1 принадлежит к тождественному делителю группы $\mathfrak{G}$. Таким образом $\mathfrak{G}$ допускает s-группу в качестве г. о., ч. и тр. д.

13. При доказательстве этой теоремы существенно, что каждая система значений параметров группы Γ однозначно определяет точку пространства $\mathfrak{R}$. В силу этого для нашей группы годится шрейеровское определение группы (67), так что здесь применима вся теория Шрейера. Если же это условие не выполняется, то мы можем, например, встретиться с явлением, когда нециклическая группа монодромии алгебраической функции от одной переменной допускает в качестве г. о. одночленную непрерывную группу. Например, непрерывная группа, определяемая уравнениями

$$x + y + z = C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = C_3 t,$$

содержит делителем симметрическую группу подстановок третьей степени, которая даже не абелева.

14. Пусть задана конечная группа $\mathfrak{G}$ без центра. Как определить ту из ее групп одевания, которая имеет представление в пространстве возможно меньшего числа измерений? Чтобы ответить на этот вопрос, обратим внимание на то, что каждая из искомых непрерывных групп „локально изоморфна“ с некоторой линейной однородной группой Γ. При этом Γ должна иметь делителем или $\mathfrak{G}$ или конечную группу, имеющую $\mathfrak{G}$ дополнительной группой относительно своего центра. Это следует из шрейеровской теории „локально изоморфных групп“ (67), согласно которой „локально изоморфные“ группы являются дополнительными группами *накрывающей группы* (Überlage-

rungsgruppe) относительно дискретных групп, лежащих в центре накрывающей группы. Таким образом из иследований И. Шура (69, 70) вытекает, что нужно рассмотреть все „группы представления“ группы $\mathfrak{G}$. Как известно, их число конечно.

Этот вопрос допускает сравнительно простой ответ в случае, когда $\mathfrak{G}$ есть простая группа. Действительно, тогда также все ее г. о. просты. Но из исследований Киллинга (W. Killing) (40) и Картана (13) вытекает, что, за исключением пяти исключительных групп, существует только три типа простых групп: 1) полные унимодулярные однородные линейные группы, 2) ортогональные группы, 3) группы комплексов. Кроме того, известно [Картан (13)], что n-мерные группы типа 1) и 3) суть $(n-1)$-группы, а типа 2) суть $(n-2)$-группы. Отсюда следует, что для решения задачи нужно лишь исследовать, не содержат ли однородные линейные группы измерения $\leqslant n-1$, [n — степень уравнения (4.1)], группу $\mathfrak{G}$. С другой стороны, Виман (90) доказал, что знакопеременные группы n-й степени ($n \geqslant 8$) не могут быть представлены однородными линейными подстановками степени $< n-1$. Это еще не позволяет нам заключить, что задача нахождения резольвенты с меньшим, чем $n-3$, числом параметров невозможна, так как нужно исследовать представляемость не только самой знакопеременной группы, но также и ее групп представления. Мы убедились на примере $n=6$, что это иногда дает возможность снизить число параметров резольвенты. Однако необходимо еще раз подчеркнуть, что задача Сильвестра-Гильберта-Вимана, дающая при $n \geqslant 9$ снижение по крайней мере на пять параметров, не может считаться частным случаем проблемы Клейна. Другими словами, мы не можем a priori утверждать, что редукция параметров, получающаяся при помощи цепи резольвент, получится также при помощи только одной резольвенты. Теорема о натуральных иррациональностях, имеющая место в классической теории Галуа, не может быть непосредственно перенесена на проблему резольвент. Решение же вопроса о цепях резольвент требует детального изучения проблемы резольвент для случая, когда коэфициенты уравнения (4.1) связаны какими-нибудь зависимостями (см. § 5, п. 8). Тогда может случиться, что одеваемая конечная группа не совпадет с группой монодромии уравнения (4.1). В п. 13 мы встретились с примером этого явления.

15. Проблема одевания конечных групп непрерывными сама по себе тоже представляет известный интерес. Я до сих пор не могу сказать, допускает ли конечная группа конечное или бесконечное число неизоморфных групп в качестве г. о. Для решения этой задачи должна быть полезной теория представления непрерывных групп [Картан (13); И. Шур (71); Р. Брауэр (R. Brauer) (8); Вейль (H. Weyl) (88)]. Но в ней весьма неблагоприятно то, что всякая непрерывная группа допускает бесчисленное множество неприводимых однородных линейных представлений.

Обратная задача ставилась уже давно. Это проблема нахождения всех конечных групп, содержащихся в заданной непрерывной группе. Жордан (C. Jordan) (39) доказал для этой проблемы следующую фундаментальную теорему:

> Всякая непрерывная однородная линейная группа содержит только такие неизоморфные конечные подгруппы $\mathfrak{G}$, дополнительные группы которых относительно абелевых нормальных делителей принадлежат к конечному числу, находимому для каждой группы Γ.

§ 5. *ДАЛЬНЕЙШИЕ ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ*

1. Вопросы алгебраической теории чисел, рассматривающие алгебраические числа под углом их рациональности, по большей части решаются методами теории Галуа. Если же исследуемые поля содержат некоторые трансцендентные (переменные) элементы, то вопросы структуры таких полей не допускают непосредственной групповой интерпретации. Если я тем не менее включаю эти вопросы в круг идей теории Галуа, то делаю это по следующим причинам: во-первых, неестественно определять теорию Галуа как такой круг идей, проблемы которого решаются при помощи групп Галуа, так как группа Галуа есть средство для решения задач, в то время как часто даже те же самые задачи могут решаться различными средствами, так что „средство" плохо приспособлено для разграничения областей науки. Во-вторых, мы заранее не можем сказать, нельзя ли решить ту или иную проблему при помощи целесообразно введенного понятия группы Галуа. В силу этого представляется более целесообразным определять теорию Галуа, как круг проблем, имеющих дело с рациональной зависимостью полей и отдельных величин поля.

2. *Тождество двух алгебраических полей.* Поле не определяется своей группой Галуа. Можно построить различные поля с изоморфными группами. Таким образом вопрос о тождестве двух полей лежит, собственно говоря, вне рамок теории Галуа. Если K — числовое поле, то это по существу вопрос теории чисел Лучшим ответом на него было бы построение полной системы инвариантов числовых полей. Для этого известны два метода. Первый вытекает из теории Дедекинда-Фробениуса (см. § 3). Этот метод

неудобен в силу бесконечного числа инвариантов, связанных между собой мало изученными соотношениями. Второй метод основан на поведении дискриминантов полей. Существует лишь конечное число полей с заданным дискриминантом. Но до сих пор не известна такая система инвариантов этого рода, которая бы вполне определяла поле. Кроме того, дискриминант поля не может принимать любое целочисленное значение, и я до сих пор не знаю, каковы те значения, которые он может принимать.

3. Тем не менее существует чисто алгебраический метод решения проблемы тождества. Если K и K_1 — два изучаемых поля, группы которых изоморфны с $\mathfrak{G}$, то их композит KK_1 в общем случае имеет группой Галуа прямое произведение $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$. Но если K и K_1 имеют нерациональное пересечение, то группа поля KK_1 превращается в настоящий делитель группы $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$. Если же K и K_1 совпадают, то группа поля KK_1 изоморфна с $\mathfrak{G}$. Отсюда можно вывести довольно удобный критерий тождества полей K и K_1. Если

$$\begin{aligned} x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n &= 0, \\ y^n + b_1y^{n-1} + \ldots + b_{n-1}y + b_n &= 0 \end{aligned} \qquad (5.1)$$

будут уравнения, корни которых (по одному) образуют соответственно поля K и K_1, то $K = K_1$ тогда и только тогда, если одна из величин

$$x_1^k y_1 + x_2^k y_2 + \ldots + x_n^k y_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

рациональна, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — все корни уравнений (5.1). Каждая из величин $x_1^k y_1 + x_2^k y_2 + \ldots + x_n^k y_n$ удовлетворяет уравнению степени $n!$, коэфициенты которого можно рационально

выразить через a_i, b_i. Поля K и K_1 тождественны тогда и только тогда, если это уравнение имеет по крайней мере один рациональный корень. Если при этом известны нормальные делители группы $\mathfrak{G}$, то можно понизить степень этого („смешанного“) уравнения при помощи смешанных уравнений для соответствующих частных резольвент.

4. Рассмотрим подробнее случаи $n=3$ и $n=4$. Если

$$x^3+px+q=0,\quad y^3+\bar{p}y+\bar{q}=0$$

будут исследуемые уравнения, то прежде всего произведение их дискриминантов должно быть полным квадратом. Далее, величина $z=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ удовлетворяет одному из смешанных уравнений

$$z^3-3p\bar{p}z-\frac{27}{2}q\bar{q}\pm\sqrt{D\bar{D}}=0.$$

Если z — один из его рациональных корней и $z^2-p\bar{p}\neq 0$, то можно при помощи уравнений

$$3a_0+2pa_2=0,\quad -2pa_1-3qa_2=z,$$
$$-2pa_0-3qa_1+2p^2a_2=u,$$

где

$$u=x_1^2y_1+x_2^2y_2+x_3^2y_3=\frac{3(qp\bar{z}-p^2\bar{q})}{z^2-p\bar{p}},$$

определить коэфициенты рационального перехода $y=a_0+a_1x+a_2x^2$.

Перейдем к случаю $n=4$. Если

$$x^4+p_2x^2+p_3x+p_4=0,$$
$$\bar{x}^4+\bar{p}_2\bar{x}^2+\bar{p}_3\bar{x}+\bar{p}_4=0$$

будут исследуемые уравнения, то сначала следует решить проблему для кубических уравнений

$$z^3-p_2z^2-4p_4z-p_3^2+4p_2p_4=0,$$
$$\bar{z}^3-\bar{p}_2\bar{z}^2-4\bar{p}_4\bar{z}-\bar{p}_3^2+4\bar{p}_2\bar{p}_4=0,$$

которым, как известно, удовлетворяют соответственно величины $z=x_1x_2+x_3x_4$ и $\bar{z}=\bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_3\bar{x}_4$. Введем обозначения:

$$\zeta=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_3\bar{z}_3,\quad u=z_1^2\bar{z}_1+z_2^2\bar{z}_2+z_3^2\bar{z}_3,$$
$$\bar{u}=z_1\bar{z}_1^2+z_2\bar{z}_2^2+z_3\bar{z}_3^2.$$

Тогда уравнение

$$F(T)=T^4-(2p_2\bar{p}_2+2\zeta)T^2-8p_3\bar{p}_3T-\frac{1}{3}\zeta^2-$$
$$-\frac{8}{3}p_2\bar{u}-\frac{8}{3}\bar{p}_2u+\frac{14}{3}p_2\bar{p}_2\zeta+p_2^2\bar{p}_2^2+$$
$$+16p_2^2\bar{p}_4+16\bar{p}_2^2p_4+\frac{64}{3}p_4\bar{p}_4=0$$

должно иметь по крайней мере один рациональный корень. Если при этом $F'(T)\neq 0$, то можно вычислить коэфициенты a_0, a_1, a_2, a_3 перехода $\bar{x}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ при помощи уравнений

$$4a_0-2p_2a_2-3p_3a_3=0,$$
$$-2p_2a_1-3p_3a_2+(2p_2^2-4p_4)a_3=1,$$
$$-2p_2a_0-3p_3a_1+(2p_2^2-4p_4)a_2+5p_2p_3a_3=0,$$
$$-3p_3a_0+(2p_2^2-4p_4)a_1+5p_2p_3a_2+$$
$$+(-2p_2^3+3p_3^2+6p_2p_4)a_3=Z,$$

где

$$\theta = x_1^2\bar{x}_1 + x_2^2\bar{x}_2 + x_3^2\bar{x}_3 + x_4^2x_4,$$

$$Z = x_1^3\bar{x}_1 + x_2^3\bar{x}_2 + x_3^3\bar{x}_3 + x_4^3\bar{x}_4.$$

5. Если K — поле алгебраических функций, то теория Галуа не применима к решению проблемы тождества. Если K зависит только от одной независимой переменной, то проблема разрешима при помощи средств теории функций. Именно, если *ранг* (Geschlecht) p поля K б льше единицы, то K определяется при помощи $3p-3$ независимых непрерывных параметров. Для таких полей известны нормальные формы определяющих их уравнений. Если мы построим по нормальной форме для каждого из сравниваемых уравнений, то проблема приводится к их сопоставлению (4, стр. 90—92).

Если K зависит от нескольких независимых переменных, то проблема в общем виде не решена. Старонемецкие и итальянские геометры получили в этой области несколько в высшей степени важных результатов. Тем не менее я боюсь, что мы и теперь должны по отношению к ним повторить фразу, содержащуюся в Цюрихском докладе Энриквеса (19):

„Malheureusement la plupart de ces problèmes demeurent aujourd'hui sans réponse, et les contributions qu'on a portées dans ce champ de recherches ressemblent en vérité à de rares flambeaux au milieu d'une obscurité épaisse".

(„К сожалению, большинство этих проблем остается до сих пор без ответа, и вклады, внесенные в эту область исследований, напоминают в сущности редкие факелы среди густой тьмы".)

6. *Минимальный рациональный базис.* Рассмотрим поле K_n всех рациональных функций от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Возникает вопрос о всех возможных типах его делителей. Легко образовать „тривиальные типы" таких делителей: для этого нужно взять некоторое число $m \leqslant n$ функционально независимых элементов поля K_n (т. е. рациональных функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$) в качестве производящих элементов делителя поля K_n. Образованное таким образом поле, очевидно, изоморфно или с K_n, или с полем K_m рациональных функций от m $(m < n)$ переменных. Но можно также ожидать существ вания другого типа полей: возьмем в качестве производящих элементов поля какие-нибудь элементы поля K_n, которые могут быть связаны алгебраическими соотношениями. Возникает вопрос, исчерпывают ли „тривиальные типы" все возможные типы делителей поля K_n. Другими словами, вопрос идет о существовании в каждом делителе системы независимых элементов, через которые могут быть рационально выражены все элементы поля. Такая система называется *минимальным рациональным базисом.*

На этот вопрос Люрот [(48); см. также Нетто (E. Netto) (53)] ответил в случае $n = 1$ утвердительно. Кастельнуово (15) распространил этот результат на случай $n = 2$. Его доказательство основано на методах алгебраической геометрии. Для случая $n = 3$ Фано (21) и Энриквес (20) нашли противоречащий пример, построив делитель поля рациональных функций от трех переменных, не имеющий минимального рационального базиса.

Проблема минимального рационального базиса имеет применение в классической теории Галуа, именно, в вопросе существования полей с заданной группой Галуа (§ 2). Чтобы ответить на этот последний вопрос, необходимо решить проблему минималь-

ного рационального базиса только для случая, когда исследуемый делитель содержит элементарно-симметрические функции от производящих переменных поля K_n. При этом ограничении предположение о существовании минимального рационального базиса ни доказано ни опровергнуто [см (74)].

Эту проблему можно также рассматривать как проблему тождества полей. В самом деле, если, например, среди производящих элементов делителя $\overline{K}$ поля K_n, m $(m \leqslant n)$ функционально независимы, то вопрос приводится к тождеству (вернее, к изоморфизму) полей $\overline{K}$ и K_m.

7. *Простейшее решение уравнений со многими неизвестными.* Пусть задано поле K рациональных функций от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, между которыми имеет место одно алгебраическое соотношение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ (случай нескольких соотношений весьма просто сводится к этому случаю). Требуется выбрать производящие величины $y_1, y_2, \ldots, y_n$ поля K так, чтобы связывающее величины y_i уравнение было возможно более низкой степени относительно одной из этих величин. Что можно сказать про эту степень?

Этот вопрос был подробно разобран Энриквесом (19) на 1-м Международном съезде математиков в Цюрихе в 1897 г. Я позволю себе повторить некоторые из рассмотренных там прекрасных результатов.

1) Будем считать x_1, x_2 переменным, а x_3, $x_4, \ldots, x_n$ параметрами. Если ранг уравнения $f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$ постоянно равен нулю, то можно выбрать переменную t так, чтобы x_1, x_2 рационально выражались через $t, x_3, x_4, \ldots, x_n$ и квадратный корень рациональной функции от $x_3, x_4, \ldots, x_n$ [M. Нётер (M. Noether) (56)].

При $n = 3$ можно целесообразным выбором t освободиться от квадратичной иррациональности.

Можно ожидать, что эта теорема будет иметь значение для нахождения полей с заданной группой $\mathfrak{G}$. Представляется вероятным, что последняя проблема будет решаться легче в том случае, когда группа $\mathfrak{K}/\mathfrak{G}$ будет нечетного порядка ($\mathfrak{K}$ обозначает *голоморф* группы $\mathfrak{G}$).

2) Если ранг p уравнения $f(x_1, x_2) = 0$ больше единицы, то поле K может быть решено присоединением иррациональности степени $\leqslant 2p - 2$.

Только в случае $p = 1$ нельзя заранее указать высшую границу для степени этой иррациональности.

8. *„Истинная степень трансцендентности" поля.* Дано поле $\mathfrak{k}$ рациональных функций от $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которые могут быть связаны алгебраическим соотношением

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0. \tag{5.2}$$

Пусть, кроме того, дано содержащее поле $\mathfrak{k}$ поле K той же степени трансцендентности, производящие величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ которого связаны с u_i уравнениями

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_1, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_2, \ldots$$
$$\ldots, \quad \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_n. \tag{5.3}$$

Требуется найти такой делитель K_1 поля K, чтобы

1) композит K_1 и $\mathfrak{k}$ давал все поле K;

2) степень трансцендентности поля K_1 была возможно меньшей.

Будем называть степень трансцендентности поля K_1 *истинной степенью трансцендентности* поля $K/\mathfrak{k}$. Очевидно, что всякая проблема теории полей значительно упростится, если мы уменьшим степень трансцендентности исследуемого поля. В этом заключается смысл проблемы.

Эта проблема содержит как частный случай так называемую проблему резольвент (§ 4). Чтобы перейти к проблеме резольвент, нужно специализировать уравнения (5.3) так:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -u_1,$$
$$x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n = u_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n u_n.$$

Величины x_i являются корнями уравнения

$$x^n + u_1 x^{n-1} + \ldots + u_{n-1} x + u_n = 0,$$

в то время как $\mathfrak{k}$ имеет производящими величинами $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и принадлежащую к заданной группе $\mathfrak{G}$ функцию Φ от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, связанную с $u_1, u_2, \ldots, u_n$ легко получаемым соотношением.

Проблема резольвент и ее обобщение — проблема цепей резольвент — являются вместе с тем развитием классической теории Галуа. Проблема резольвент допускает решение при помощи теории непрерывных групп (§ 4).

9. *Вопросы рациональности для периодов эллиптических и абелевых интегралов.* Рассмотрим сначала случай эллиптического поля. Дано поле $K(x, y)$ алгебраических функций, где между x и y имеет место уравнение

$$y^2 - (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) = 0. \qquad (5.4)$$

Как известно, x и y можно унформизировать при помощи эллиптических функций:

$$x = \mathrm{sn}(u, k), \quad y = \mathrm{cn}(u, k) \cdot \mathrm{dn}(u, k). \qquad (5.5)$$

Кроме того, на кривой (5.4) задана точка (x_0, y_0), соответствующая значению $u = u_0$ аргумента u:

$$x_0 = \mathrm{sn}(u_0, k), \quad y_0 = \mathrm{cn}(u_0, k) \cdot \mathrm{dn}(u_0, k).$$

u_0 определено однозначно с точностью до целых кратных от периодов $4K$, $4K'$. Требуется выяснить, является ли u_0 рациональным кратным периодов $4K$, $4K'$.

Эта задача может быть также формулирована как задача классической теории Галуа. В самом деле, мы можем предположить, что k, x_0, y_0 являются алгебраическими числами, так как только этот случай представляет трудность. Предположим еще, что область рациональности R содержит модуль k. Если $u_0 \equiv \equiv \frac{mK + m'K'}{n} (\mathrm{modd}\ 4K, 4K')$, где m, m', n — целые рациональные числа, то $x_0 = \mathrm{sn}\left(\frac{mK + m'K'}{n}, k\right)$ удовлетворяет так называемому *уравнению деления* (эллиптических функций)

$$\Phi_n(x_0, k) = 0, \qquad (5.6)$$

которое при переменном k неприводимо, но может распадаться внутри R, если k принимает специальные числовые значения. Пусть $f(x_0) = 0$ будет неприводимое уравнение, которому удовлетворяет x_0. Вопрос заключается в том, существуют ли значения n, при которых $\Phi_n(x, k)$ делится на $f(x)$.

10. Обозначая точки римановой поверхности, для которых имеет место $\mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}\, u_0$, через P_1 и P_2, мы можем записать наше условие так:

$$n \cdot u(P_1) - n \cdot u(P_2) \equiv 0 \ (\mathrm{modd}\ 4K, 4K'),$$

где $u(P)$ — интеграл первого рода. Отсюда в силу теоремы Абеля следует, что существует функция $\varphi(x, y)$ поля $K(x, y)$, имеющая в P_1 единственный n-кратный нуль и в P_2 единственный n-кратный полюс. Можно также сказать, что идеал $\frac{P_1^n}{P_2^n}$ является главным идеалом. Тогда можно также выра-

зить φ через *примфункции*, т. е. представить в виде $\varphi = e^{n \cdot \Pi(P_1, P_2)}$, где $\Pi(P_1, P_2)$ обозначает интеграл третьего рода с вычетами $+2\pi i$ в P_1 и $-2\pi i$ в P_2.

Можно построить функцию z второго порядка, имеющую полюсы в P_1 и P_2 [по Золотареву $z = \frac{\mathrm{sn}^2(u, k)}{\mathrm{sn}^2(u, k) - \mathrm{sn}^2(u_0, k)}$]. Тогда $\Pi(P_1, P_2)$ может быть представлен в виде

$$\int \frac{z + A}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha)(z-\beta)}}\, dz,$$

где $\alpha = \frac{1}{\mathrm{dn}^2 u_0}$, $\beta = \frac{1}{\mathrm{cn}^2 u_0}$, и вопрос сводится к тому, может ли этот интеграл [при соответствующем значении A, выбор которого соответствует нормированию периодов интеграла $\Pi(P_1, P_2)$], быть выражен в логарифмах или нет.

11. Этот вопрос был впервые поставлен Абелем (N. H. Abel) (1). Абель решил эту задачу алгебраическим путем, использовав то обстоятельство, что $\varphi = \frac{P_1^n}{P_2^n}$ есть *функциональная единица*, т. е. что ее норма постоянна, и пытаясь решить получающееся отсюда для $\varphi = \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}$ диофантово уравнение $p^2 - q^2 R = 1$ при помощи разложения $\sqrt{R(x)}$ в непрерывную дробь. Для положительного разрешения этого вопроса необходимо и достаточно, чтобы разложение $\sqrt{R(x)}$ было периодическим. Однако эта периодичность не может быть непосредственно установлена или опровергнута при помощи конечного числа действий. Для этого было необходимо найти для возможного числа звеньев в периоде верхнюю границу. Эта задача была решена П. Чебышевым (77)

для случая рациональных коэфициентов полинома $R(x)$ и Е. Золотаревым (92) для произвольного вещественного $R(x)$.

Чебышев и Золотарев получили свои результаты, подвергая переменные следующим преобразованиям:

$$\left.\begin{aligned} &u \to u + u_0,\ u_0 \to 2u_0,\ k \to k, \\ &\alpha \to \left(\frac{\beta + \alpha - 1}{1 + \beta - \alpha}\right)^2, \quad \beta \to \left(\frac{\beta + \alpha - 1}{1 + \alpha - \beta}\right)^2, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} &u \to (1 + k')\ u,\ k \to \frac{1 - k'}{1 + k'}, \\ &\alpha \to \left[\frac{\sqrt{(\beta - \alpha)(\beta - 1)} - \sqrt{\alpha}}{1 + \alpha - \beta}\right]^2, \\ &\beta \to \left[\frac{\sqrt{(\beta - \alpha)(\beta - 1)} + \sqrt{\alpha}}{1 + \alpha - \beta}\right]^2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

последовательно несколько раз. Преобразование (II) имеет целью перевести четное n в нечетное n и является не чем иным, как преобразованием Ландена. Если после нескольких шагов величина $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ перестанет находиться в поле $K(\alpha, \beta)$, то это является признаком того, что преобразованный интеграл соответствует нечетному значению n. Тогда нужно применять преобразование (I). Вопрос получает положительный ответ, если последовательность этих преобразований дает период. В противном случае несоблюдение после конечного числа шагов некоторых условий делимости указывает, что задача невозможна.

12. Вопрос о соизмеримости периодов абелевых интегралов имеет еще применение в совершенно другой области математики — в одном вопросе диофантова анализа. Пусть задано уравнение

$$f(x, y) = 0, \qquad (5.7)$$

коэфициенты которого лежат в алгебраическом числовом поле K и ранг которого $p = 1$. Вопрос идет о существовании значений x_0, y_0, удовлетворяющих уравнению (5.7) и содержащихся в K. Назовем их кратко рациональными точками кривой (5.7). Можно преобразовать уравнение (5.7) к виду

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \tag{5.8}$$

в случае нужды расширив поле K. Кривая (5.8) может быть параметрически выражена следующим образом:

$$x = \wp(u), \quad y = \wp'(u). \tag{5.9}$$

Если некоторые значения u_1, u_2 аргумента u соответствуют рациональным точкам кривой (5.8), то из теоремы сложения следует, что и $u_1 \pm u_2$ соответствуют рациональным точкам. Другими словами, рациональные точки кривой (5.8) образуют аддитивный модуль, который мы в дальнейшем будем называть *модулем K-рациональности*. Пуанкаре (H. Poincaré) (59) предположил и Морделль (L. J. Mordell) (51) доказал, что всякий модуль рациональности имеет конечный базис.

Если $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ является таким базисом, то возникает вопрос о структуре образуемой этим базисом аддитивной абелевой группы $\mathfrak{A}$. Так как всякое значение аргумента u можно редуцировать при помощи модулей ω_1, ω_2, где ω_1, ω_2 периоды $\wp(u)$ и $\wp'(u)$, то число независимых производящих элементов бесконечного порядка (ранг) этой группы равно n тогда и только тогда, если между u_i не имеет места никакое сравнение типа

$$m_1u_1 + \ldots + m_nu_n \equiv 0 \ (\mathrm{modd}\ \omega_1, \omega_2), \tag{5.10}$$

где m_i — целые рациональные числа. В общем же случае базис группы $\mathfrak{A}$ состоит из ϱ элементов

$A_1, A_2, \ldots, A_\varrho$ бесконечного порядка и σ элементов $B_1, B_2, \ldots, B_\sigma$ $(\varrho + \sigma \leqslant n)$ конечных порядков. Кронекер назвал число ϱ *рангом рациональности* системы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ $(\mathrm{modd}\ \omega_1, \omega_2)$; оно является наибольшим числом рационально независимых элементов. Прием Золотарева учит нас определять рациональности в случае $n = 1$ [1]), и, вероятно, допускает непосредственное распространение на общий случай.

13. Задачи, возникающие на основании этих соображений, можно формулировать так:

I. Найти метод для решения вопроса, соизмеримо ли значение a аргумента u, определяемого уравнениями $\mathrm{sn}\, a = x_0$, $\mathrm{cn}\, a \cdot \mathrm{dn}\, a = y_0$ [или уравнениями $\wp(a) = x_0$, $\wp'(a) = y_0$] с периодами или нет.

Речь идет только о решении вопроса в том случае, когда ланденово преобразование заданной эллиптической функции периодично. Этот случай, наверное, не произойдет, если кривая (5.4) или (5.8) вещественна.

II. Определить ранг рациональности модуля $u_1, u_2, \ldots, u_n$ $(\mathrm{modd}\ \omega_1, \omega_2)$, если значения u_i определяются из уравнений $\wp(u_i) = x_i$, $\wp'(u_i) = y_i$, и ω_1, ω_2 периоды эллиптической функции $\wp(u)$.

III. Заданы поле эллиптических алгебраических функций (например заданием значения модуля k) и содержащее величину k числовое алгебраическое поле K. Найти базис соответствующего модуля K-рациональности. Если задан базис $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ [явным заданием значений $\wp(u_i)$], то решить, является ли он базисом модуля K-рациональности или нет.

---

[1]) Нагелль (T. Nagell) (52, стр. 96) считает, что „on n'a pas de méthode générale pour reconnaître si l'argument d'un point donné (x, y) est commensurable avec une période ou non". На самом же деле эта задача решена в упомянутых исследованиях Золотарева.

14. Формулировки упомянутых только что задач могут быть без большого труда перенесены на поля алгебраических функций более общего вида. Прежде всего представляется вероятным, что вопрос о конечности алгебраически заданного преобразования описанной в § 1, п. 9 „якобиевой группы“ близок к вопросу об интегрируемости абелевых интегралов в логарифмах. С другой стороны, соображения п. 10 могут быть без труда перенесены на общий случай. Это показывает, что между якобиевой группой и группой идеальных классов любого поля алгебраических функций существует какая-то связь. С другой стороны, с изложенной проблемой связан вопрос о функциональных единицах [1]).

А. Вейль (A. Weil) (87) исследовал при помощи аналогичного метода диофантовы уравнения $f(x, y) = 0$ при любом p. Он распространил результат Морделла о конечности модуля K-рациональности на любые $p \geqslant 1$. Для этого он рассмотрел якобиеву группу, подобно тому как Морделль неявно рассматривал деление эллиптических функций.

15. Диофантова проблема может считаться частным случаем следующей проблемы неприводимости Гильберта-Дёрге (Doerge) (18):

Задано уравнение

$$f(z, t) = 0.$$

Найти все значения t_i, при которых $f(z, t^i)$ есть приводимый в заданном поле $\mathfrak{R}$ полином.

По Дёрге из исследований Вейля (87) следует, что при $p > 1$ бесчисленное множество значений t_i

[1]) На эту связь обратил мое внимание мой многоуважаемый учитель акад. Д. А. Граве. См., например, Труды Всероссийского съезда математиков в Москве (1927), стр. 215.

такого рода может существовать только в том случае, если $f(z, t)$ после некоторой подстановки вида

$$t = c_{-m} u^{-m} + c_{-m+1} u^{-m+1} + \ldots$$
$$\ldots + c_0 + c_1 u + \ldots + c_m u^m$$

превращается в тождественно приводимый полином от z и u [1]).

Упомянутая работа Дёрге посвящена случаю, когда z есть функциональная единица. Тогда Дёрге получает весьма простые условия для того, чтобы $f(z, t)$ был для конечного числа значений t приводим внутри $\mathfrak{k}$. Интересно, что это дает новую непосредственную связь между диофантовыми уравнениями и функциональными единицами.

[1]) В этом направлении Зигель (C. R. Siegel, Abh. Preuss. Akad., Berlin, 1930 вып. 1) получил существенно новые результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. H. Abel, Sur l'intégration de la formule etc. Oeuvres, Christ. 1881, т. I, 104—144.

2. E. Artin, Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Hamb. Abh., **5**, 353—363, 1927.

3. R. Baer, Abbildungseigenschaften algebraischer Erweiterungen, Math. Zeitschrift, **33**, 451—479, 1931.

4. H. F. Baker, Abel's Theorem and the allied Theory etc., Cambridge 1897.

5. M. Bauer, Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt, Math. Ann., **64**, 325—327, 1907.

6. M. Bauer, Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt, Math. Zeitschrift, **16**, 318—319, 1923.

7. H. Brandt, Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, Math. Ann., **96**, 360—366, 1926.

8. R. Brauer, Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen, Berl. Diss., 1925.

9. R. Brauer, H. Hasse, E. Noether, Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, Crelle, **167** (Hensel-Festband), 399—404, 1931.

10. S. Breuer, Zur Bestimmung der metazyklischen Minimalbasis vom Primzahlgrad, Math. Ann., **92**, 1924.

11. S. Breuer, Metazyklische Minimalbasis und komplexe Primzahlen, Crelle, **156**, 13—42, 1927.

12. E. S. Bring, Meletamata quaedam mathematica circa transformationem etc., Diss., Uppsala 1786.

13. É. Cartan, Sur la structure des groupes finis et continus, Thèse, Paris 1894.

14. É. Cartan, Sur la structure des groupes infinis, C. R., **135**, 851—854, 1902.

15. G. Castelnuovo, Sulla razionalità delle involuzioni piane, Math. Ann., **44**, 125—155, 1894.

16. R. Dedekind, Zur Theorie der Ideale, Gött. Nachr., 272—277, 1894.

17. R. Dedekind, Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern, Crelle, **121**, 40—123, 1900.

18. K. Doerge, Bemerkung zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, Math. Ann., **102**, 521—530, 1929.

19. F. Enriques, Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques etc., Math. Ann., **51**, 134—153, 1899.

20. F. Enriques, Sopra una involuzione non razionale dello spazio, Rendic. Linc., **21**, 81—83, 1912.

21. G. Fano, Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni etc., Atti Acc. Torino, **43**, 973—981, 1908.

22. E. Fischer, Zur Theorie der endlichen Abelschen Gruppen, Math. Ann., **77**, 81—88, 1916.

23. G. Frobenius, Über Beziehungen zwischen Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen usw., Sitzber. Berl. Akad. 1896, 689—705.

24. R. Fueter, Die Theorie der Zahlstrahlen. I, Crelle, **130**, 197—257, 1905; II, Crelle, **132**, 255—269, 1907.

25. R. Fueter, Abelsche Gleichungen in quadratisch imaginären Zahlkörpern, Math. Ann., **75**, 177—255, 1914.

26. Ph. Furtwängler, Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen Zahlkörpers, Math. Ann., **63**, 1—37, 1907.

27. Ph. Furtwängler, Über Minimalbasen für Körper rationaler Funktionen, Sitzber. Wiener Akad., **134**, 69—80, 1925.

28. R. Garver, On the removal of four terms from an equation by means of a Tschirnhaus transformation, Bull-Amer. Math. Soc., **35**, 73—78, 1929.

29. G. H. Halphen, Traité des fonctions élliptiques et leurs applications etc., 3, Paris 1891.

30. H. Hasse, Zwei Existenztheoreme über algebraische Zahlkörper, Math. Ann., **95**, 229—238, 1925.

31. H. Hasse, Ein weiteres Existenztheorem in der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Math. Zeitschrift, **24**, 149—160, 1925.

32. H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. I, Jahresber. D. M. V., **35**, 1—55, 1926; Ia, там же, **36**, 233—311, 1927; II, там же, VI. Ergänzbd., 1930.

33. H. Hasse, Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage, Math. Zeitschrift, **31**, 565—582, 1930.

34. H. Hasse, Theory of Cyclic Algebras over an Algebraic Number Field, Trans. Amer. Math. Soc., **34**, 171—214, 1932.

35. D. Hilbert, Über die Irreducibilität ganzer rationaler Funktionen usw., Crelle, **110**, 104—129, 1892.

36. D. Hilbert, Mathematische Probleme, Gött. Nachr., 253—297, 1900.

37. D. Hilbert, Über die Gleichung neunten Grades, Math. Ann., **97**, 243—250, 1926.

38. A. Hurwitz, Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, Math. Ann., **41**, 403—442, 1893.

39. C. Jordan, Mémoire sur les équations différentielles etc., Crelle, **84**, 89—215, 1878.

40. W. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. I, Math. Ann., **31**, 252—290, 1888; II, Math. Ann., **33**, 1—48; III, Math. Ann., **34**, 57—122; IV, Math. Ann., **36**, 161—189.

41. F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, т. 2, стр. 255—504, Berlin 1922.

42. L. Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie, Lpz. 1901, стр. 452—492.

43. W. Krull, Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen, Math. Ann., **100**, 687—698, 1928.

44. E. E. Levi, Sulla struttura dei gruppi finiti e continui, Atti Acc. Torino, **40**, 423—437, 1905.

45. S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, т. I, Lpz. 1888.

46. A. Loewy, Neue elementare Begründung und Erweiterung der Galoisschen Theorie, Sitzber. Heidelb. Akad., I, 7. Abh., 1925; II, 1. Abh., 1927.

47. A. Loewy, Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen, Crelle, **157**, 239—254, 1927.

48. Lüroth, Beweis eines Satzes über rationale Curven, Math. Ann., **9**, 163—165, 1876.

49. F. Mertens, Über Dirichlet's Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern teilerfremd ist, unendlich viele Prim zahlen enthält, Sitzber. Wiener Akad., **106**, 254—286, 1897.

50. F. Mertens, Ein Beweis des Galois' schen Fundamentalsatzes, Sitzber. Wiener Akad., **111**, 17—37, 1902.

51. L. J. Mordell, On the Rational Solutions of the Indeterminate Equations of the Third and Fourth Degrees, Proc. Cambr. Phil. Soc., **21**, 179—192, 1922.

52. T. Nagell, Sur les propriétés arithmétiques des cubiques planes du premier genre, Acta Math., **52**, 93—126, 1928.

53. E. Netto, Über einen Lüroth-Gordan'schen Satz, Math. Ann., **46**, 310—318, 1895.

54. C. Neumann, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, 2. Aufl., Lpz. 1884.

55. E. Noether, Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe, Math. Ann., **78**, 221—227, 1918.

56. M. Noether, Über Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen, Math. Ann., **3**, 161—227, 1871.

57. O. Ore, Zur Theorie der Eisensteinschen Gleichungen, Math. Zeitschrift, **20**, 267—279, 1924.

58. O. Perron, Über Gleichungen ohne Affek Sitzber. Heidelb. Akad. 3. Abh., 1923.

59. H. Poincaré, Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, Journ. de Math. (5) **17**, 161, 1901.

60. F. Pollaczek, Über die Einheiten relativ Abelscher Zahlkörper, Math. Zeitschrift, **30**, 520—551, 1929.

61. R. Remak, Über die Abschätzung des absoluten Betrages des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers nach unten, Crelle, **167** (Hensel-Festband), 360—378, 1931.

62. С. О. Шатуновский, Алгебра, как учение о сравнениях по функциональным модулям, Дисс., Одесса 1917.

63. A. Scholz, Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe, Math. Zeitschrift, **30**, 332—356, 1929.

64. A. Scholz, Reduktion der Konstruktion von Körpern mit zweistufiger (metabelscher) Gruppe, Sitzber. Heidelb. Akad., 14. Abh., 1929.

65. A. Scholz, Ein Beitrag zur Theorie der Zusammensetzung endlicher Gruppen, Math. Zeitschrift, **32**, 187—189, 1930.

66. A. Scholz, Über das Verhältnis von Idealklassen- und Einheitengruppe in Abelschen Körpern von Primzahlpotenzgrad, Sitzber. Heidelb. Akad., 3. Abh., 31—55, 1930.

67. O. Schreier, Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Grossen, Hamb. Abh., **5**, 233—244, 1927.

68. I. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, Diss., Berlin 1901.

69. I. Schur, Über die Darstellung der endlichen Cruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, I, Crelle, **127**, 20—50, 1904; II, Crelle, **132**, 85—137, 1907.

70. I. Schur, Beispiele für Gleichungen ohne Affekt, Jahresber. D. M. V., **29**, 1920.

71. I. Schur, Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, Sitzber. Berl. Akad. 1928, 96—124.

72. I. Schur, Gleichungen ohne Affekt, Sitzber. Berl. Akad. 1930, 443—449.

73. A. Speiser, Die Zerlegung von Primzahlen in algebraishen Zahlkörpern, Trans. Amer. Math. Soc., **23**, 173—178, 1922.

74. E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Crelle, **137**, 167—308, 1910; переиздано в 1930, с добавлением: R. Baer und H. Hasse, Abriss der Galoisschen Theorie.

75. J. J. Sylvester, On the so-called Tschirnhausen Transformation, Crelle, **100**, 465—487, 1886.

76. T. Takagi, Über eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers, Journ. Coll. Sc. Tokyo, **41**, Art. 9, 1920.

77. P. Tchebycheff, Sur l'intégration de la différentielle $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx$. Oeuvres I, 517—530.

78. Н. Чеботарев, Задача, обратная задаче Чирнгаузена, Журнал чистого и прикл. знания, отдел физ-мат. и техн. наук, т. I, вып. 2, 1922.

79. Н. Чеботарев, К задаче нахождения алгебраических уравнений с наперед заданной группой, Изв. Каз. физ.-мат. об-ва (3) **1**, 26—32, 1926.

80. N. Tschebotarö w, Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören, Math. Ann., **95**, 191—228, 1925

81. N. Tschebotarö w, Studien über Primzahlendichtigkeiten, Bull. Soc. Math. Kasan, I, (3), **2**, 14—20, 1927; II, (3), **3**, 1—17, 1928.

82. N. Tschebotarö w, Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers, Crelle, **161**, 179—193, 1929.

83. N. Tschebotarö w, Über ein algebraisches Problem von Herrn Hilbert, Math. Ann., I, **104**, 459—471, 1931; II, **105**, 240—255, 1931.

84. N. Tschebotarö w, Untersuchungen über relativ Abelsche Zahlkörper, Crelle, **167** (Hensel-Festband), 98—121, 1931.

85. Г. Ф. Вороной, О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения третьей степени, Маг. дисс., Спб. 1894.

86. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, т. III, Braunschweig 1908.

87. A. Weil, L'arithmétique sur les courbes algébriques, Acta Math. **52**, 281—315, 1929.

88. H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen, Math. Zeitschrift, I, **23**, 271—309, 1925; II, **24**, 328—376, 1925; III, **24**, 377—395, 1925.

89. A. Wiman, Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen, Math. Ann., **47**, 531—556, 1896.

90. A. Wiman, Über die Darstellung der symmetrischen und alternierenden Vertauschungsgruppen usw., Math. Ann., **52**, 243—270, 1899.

91. A. Wiman, Über die Anwendung der Tschirnhausentransformation auf die Reduktion algebraischer Gleichungen, Nova Acta, Uppsala, стр. X, 3—8, 1927.

92. Е. И. Золотарев, Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению, Докт. дисс., Спб. 1874. — Сочинения, т. I, Ленинград 1931, стр. 161—360.

П. ДЮПЮИ.

ЖИЗНЬ ГАЛУА

Первый материал для этого очерка [1]) был собран много времени тому назад в поисках за данными, относящимися к истории Нормальной школы. В прошлом году я решил его использовать, составив краткую биографию, как дополнение к чисто научному очерку, который Софус Ли написал о Галуа в Livre du centenaire de l'École Normale (книге, посвященной столетию Нормальной школы). Мне нехватило времени не столько для написания, сколько для пополнения исследований, которое казалось мне необходимым. Может быть, я бы не так скоро их возобновил, если бы Société Mathématique не объявило об издании сочинений Галуа, до сих пор рассеянных по различным научным сборникам, в которых они появились, или же собранных в Annales de Liouville за 1846 г., так что математики не всегда легко имеют их в своем распоряжении. Случай показался мне подходящим для окончания моего исследования, которое я распространил во всех направлениях, стремясь постигнуть по возможности глубже личность Галуа и осве-

[1]) P. Dupuy, La vie d'Évariste Galois, Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 3-я серия, т. 13, 1896, стр. 196—266.

тить ее также и с внешней стороны точным знанием эпохи и особых обстоятельств, при которых он жил.

В своем распоряжении я прежде всего имел некоторое количество заметок, опубликованных о Галуа в различных сборниках и поставлявших до сих пор материал для статей в биографических или энциклопедических словарях, заметок, конечно, очень интересных, но в то же время и очень неполных. Наиболее старая и важная из них — та, которую его товарищ по школе и друг Огюст Шевалье поместил в ноябре 1832 г. в Revue encyclopédique Ипполита Карно и Пьера Леру. Заметке было предпослано предисловие, в котором я определенно узнаю руку Пьера Леру. Четырнадцать лет спустя Лиувилль, печатая неизданные мемуары Галуа, составил также биографическое примечание, которое, правда, ничего не добавляет к заметке в Revue encyclopédique. В 1848 г. Magasin pittoresque, в свою очередь, опубликовал краткую, никем не подписанную биографию, принадлежащую, как сказал мне Людовик Лалан [1]), Фложергу [2]), и портрет, сделанный по памяти Альфредом Галуа, братом Эвариста Галуа. В 1849 г. Nouvelles Annales de Mathématiques выпустили вслед за заметкой о Ришаре, профессоре Галуа по «специальному классу», короткую заметку о самом Галуа.

Наконец, в последние годы Intermédiaire des chercheurs et des curieux указал в мемуарах Александра Дюма — отца интересный отрывок о дуэли, на которой Галуа был смертельно ранен.

---

[1]) Людовик Лалан знал Галуа в лицее Людовика Великого (Louis le Grand); слышал он о нем, главным образом, от своего брата Леона, который был в «специальном математическом классе» вместе с Галуа.

[2]) Фложерг, товарищ Галуа по лицею, вновь встречался с ним в течение последних месяцев 1830 г. в Нормальной школе, откуда он был исключен, как и Галуа.

Такова была совокупность доступных всем документов, которые я мог использовать в первую очередь. Для того чтобы их проверить, критически к ним отнестись и дополнить, мне пришлось порыться в различных архивах. Мне удалось найти материал в архивах Нормальной школы, Министерства народного просвещения и Парижской академии, в Национальном Архиве, в архивах гор. Bourg-la-Reine, Сенской префектуры, госпиталя Cochin, в тюремных архивах Консьержери и Sainte-Pélagie. Архивы префектуры полиции, судебной палаты и трибунала Парижа, где должны были находиться интересные заметки и все делопроизводство судебных дел Галуа, были сожжены в 1871 г. Коллекции газет того времени, хранившиеся либо в Национальной библиотеке, либо в Библиотеке арсенала, позволяют лишь весьма неполно возместить отсутствие этих документов. Однако Gazette des Tribuneaux дала отчет обо всех процессах Галуа. Другие газеты, как, например, Tribune, доставили мне несколько интересных подробностей. Gazette des Écoles дополняет документы, сохранившиеся в Национальном архиве и архиве Нормальной школы, по поводу дела, приведшего к исключению Галуа из Нормальной школы.

В книгах, говорящих об эпохе Галуа, нет недостатка, но они в общем, исключая «Мемуары» префекта полиции Жике и Lettres sur les prisons de Paris («Письма о тюрьмах Парижа») Распайля, дают только очень краткие указания, неспособные прибавить что-либо к его биографии. По правде говоря, не существует еще ничего, что позволило бы нам дать себе точный отчет об истории республиканской партии в этот героический период ее существования, и я надеюсь, что когда документы, мемуары или корреспонденция главных вожаков партии будут преданы гласности, мы найдем там о Галуа и в частности об обстоятельствах, при которых он встретил смерть, новые сведения, способные осветить тайну. Для меня выполнить это оказалось невозможным.

Я обратился, наконец, к семье Галуа, которую счастливый случай дал мне возможность очень быстро найти. Единственный оставшийся в живых из воспитанников Нормальной школы, знавших Галуа в школе,—Бенар, как раз женился на двоюродной сестре Галуа; от нее и от других оставшихся в живых родственников, с которыми она меня познакомила, я получил как личные воспоминания, так и рассказы, сохранившиеся в семье за шестьдесят четыре года, протекшие после смерти Галуа. Из этого источника моим главным приобретением был портрет Галуа, сделанный с натуры, когда ему было лет пятнадцать или шестнадцать.

Само собой разумеется, что я подверг все документы, которые были у меня в руках, взаимному контролю. Я старался это делать беспристрастно, хотя и с беспрерывно возрастающей симпатией к гениальному и несчастному юноше.

Я все время видел его в окружении вещей, людей, событий, учреждений его эпохи; исторический интерес присоединялся у меня таким образом к интересу биографа.

Моим главным желанием является замена точным портретом этого знаменитого математика тех смутных эскизов, которые были в нашем распоряжении; я сознаюсь, однако, что для меня было бы также большим удовлетворением, если бы оказалось, что я сумел пролить свет на некоторые любопытные уголки революции 1830 г., а также на те смутные и оживленные годы, в которые она протекала.

I

Эварист Галуа родился 25 октября 1811 г. в Bourg-la-Reine, в доме, имеющем ныне № 20 по улице Grand'Rue. Этот дом был пансионом для молодых людей; основан он был еще до революции. Его владельцем был дед Эвариста. Дед Галуа не только не пострадал от революции, но, напротив, был обязан ей процветанием своего пансиона: Bourg-la-Reine, переименованный в Bourg-l'Égalité, пользовался относительным спокойствием при недалеком расстоянии от

Парижа; большинство же других лицеев и пансионов, бывших почти сплошь под руководством духовных лиц, было уничтожено или оказалось под подозрением; этими благоприятными обстоятельствами учебное заведение Галуа воспользовалось; частью своих успехов оно было также обязано пылким чувствам, которые связали семью Галуа сначала с революцией, а затем с порядком вещей, который был ее следствием. В то время, когда его старший сын, офицер императорской гвардии, сражался то тут, то там по всей Европе, Галуа передал пансион своему младшему сыну Николаю-Габриелю и когда родился Эварист, Николай Габриель стал настоящим чиновником, главой учебного заведения Императорского университета.

Николаю-Габриелю Галуа было тогда 36 лет: это был вполне человек XVIII века, любезный и остроумный, умеющий писать стихи и сочинять салонные комедии; в то же время он был глубоко проникнут философией. Он с радостью встретил падение королевской власти, и даже при закате империи он предпочитал бы все возвращению старого режима. Первая реставрация сделала его главой либеральной партии в Bourg-la-Reine. Во время «Ста дней» голосование первоначального собрания доверило ему мэрство городка. После Ватерлоо он должен был бы вернуть место своему предшественнику, но последний в это время дискредитировал себя темными делами и только что покинул страну. Галуа воспользовался затруднениями префекта и просил своего утверждения или замещения, и из-за отсутствия другого кандидата был официально вновь назначен на должность, которую он и не переставал занимать. Он ее сохранил до самой смерти, оставаясь несомненно исполнительным и щепетильно верным присяге, которую принес королю. Но он был достаточно силен поддержкой своих подчиненных, чтобы твердо противостоять всемогуществу кюре.

Он женился во времена империи на молодой девушке Аделаиде-Мари Демант, семья которой, хорошо известная

парижскому факультету права, жила в Bourg-la-Reine почти напротив дома Галуа. Там, в скромном достатке, с давних пор сохранились традиции интеллектуальной культуры, которые Эварист Галуа получил в достояние от своего детства. Его дед с материнской стороны, Томас-Франсуа Демант, был доктором прав старого Парижского университета. Во время империи он стал судьей, и когда родился Эварист, он был председателем суда города Louviers. Это был страстный латинист старого режима. Он сам воспитал всех своих детей, дочерей и сыновей, в духе старой классической школы; в то же время он дал им основательное религиозное образование; но на его дочери Аделаиде-Мари отпечаток античности отразился сильнее. Среди кажущейся монотонности ежедневных переводов из «Conciones», беспрестанно встречающиеся примеры римского стоицизма проникли в самую глубину души молодой девушки и закалили ее. При этом пылкое воображение еще больше экзальтировало ее характер и придавало ее чувствам, будь то чувство чести или всепрощения обид, оттенок страстности.

Такова была мать Эвариста Галуа. Ее нужно знать, чтобы лучше понять его самого, и также нужно знать, что до двенадцати лет она была его единственным учителем. Почти все, что мы знаем об этом первом периоде его жизни, это то, что мы знаем о его матери. Так как она умерла в 1872 году в возрасте 84 лет, то мне было довольно легко встретить людей, давно и хорошо ее знавших. Они сохранили теплые воспоминания об ее уме, остававшемся живым до самого конца, об ее щедрости, доходившей до непредусмотрительности; мне случалось даже слышать о ее оригинальности и странности. Я считал нужным отметить это, так как это также поможет нам объяснить аналогичные суждения, высказываемые об ее сыне, который, наверно, унаследовал от нее главные черты своей моральной личности. Что касается его самого, умершего таким молодым шестьдесят четыре года назад, то редкие оставшиеся в живых родственники и друзья, знавшие его, когда он еще был учеником своей матери, сохранили очень смутные воспоминания о том отдаленном времени. Однако его двоюродная сестра, M^me Бенар, урожденная Демант, дочь и сестра хорошо известных в свое время юрис-консультов, преподававших на факультете права, еще помнит серьезного и милого мальчика, спокойного и приветливого, который занимал большое место в мирке детей, группировавшихся вокруг бабушки Демант. Это был Эварист; являясь достойным сыном своего отца, он в дни семейных праздников сочинял, следуя старинной моде, диалоги или слагал куплеты, которыми его сестра, кузены и кузины забавляли старушку. M^me Бенар очень охотно рассказала мне о контрасте между юношеским весельем лет, проведенных в Bourg-la-Reine, и пустотой, вызванной отъездом Галуа при его поступлении в лицей Louis le Grand, а также о происшедшей вскоре после этого перемене характера Галуа, которая совпала с первым расцветом его математического гения, и предшествовала последним годам его жизни, таким полным и бурным.

В 1823 г. Галуа оставил свою семью для поступления в лицей. Уже двумя годами раньше ему был предоставлен полупансионат в лицее гор. Реймса [1]), но его мать предпочла иметь его при себе, и он оставил ее лишь при поступлении в четвертый класс лицея Louis le Grand в качестве интерна.

Чувствительный, каким он был, ребенок должен был испытать странное впечатление, попав из родного городка и родительского дома, от жизни серьезной и одновременно радостной, в это мрачное жилище старого лицея, все обнесенное решетками и скрывавшее море страстей под внешним видом тюрьмы: страсть к работе и академическим успехам, страстные увлечения либеральными идеями, воспоминаниями о революции и империи, ненависть и презрение к легитимистской реакции. С 1815 г. волнения там не прекраща-

[1]) Архив Министерства народного просвещения.

лись; за восемь лет сменились два директора: первый, Тайере, потому, что уже одно его присутствие вызывало волнения; второй, Малеваль, наоборот, за то, что для успокоения он предоставлял либерализму полную свободу. К моменту поступления Галуа в лицей Louis le Grand новый директор Берто только что приступил к исполнению своих обязанностей и собирался править твердой рукой. Тотчас же интерны решили, что его поставили затем, чтобы подготовить возвращение иезуитов, и они выразили протест, отказавшись петь во время богослужения. Репрессии не заставили себя ждать: их результатом было то, что волнения приняли более активную форму и перекинулись в аудитории; тогда зачинщиков выбросили на улицу, не предупредив даже их семьи, и ожесточение учеников было таково, что они решили встретить молчанием традиционный тост за короля, провозглашенный в день Карла Великого в 1824 г. Они не только молчали, но когда несколько преподавателей недружно поддержали тост, то их вялые голоса были заглушены смехом. Ужасный скандал! Пораженный и взбешенный Берто, не колеблясь, исключил всех учеников, присутствовавших на банкете; таким образом он обезглавил свой лицей [1]).

В январе 1824 г. Галуа еще не числился среди первых учеников в своем классе, поэтому он не был исключен. Возможно даже, что он был отчасти обязан этому потрясению получением при распределении наград приза и трех похвальных листов; во всяком случае они вполне удостоверяют, что ребенок делал честь урокам своей матери и не потерял навыков к регулярной работе, которые ему были даны. Нужно, однако, думать, что то, что он видел в лицее Louis le Grand в течение первого года интерната, оказало решительное влияние на его характер; без сомнения, это был первый кризис в его детской жизни.

[1]) Quicherat, Histoire de Sainte Barbe.

До того времени он только по книгам и беседам с матерью знал о борьбе и жертвах ради свободы, о заговорах против тирании; а тут он увидел это осуществленным в действительности в этом новом для него мире лицея, где страху не удалось заглушить веяний свободы, а теснота стен и суровость регламента даже придавали еще больше силы юным душам, спаянным радостью первых восторгов. Его душа была слишком хорошо подготовлена, чтобы не быть сразу же захваченной тем, что было отважного в духе брожения, царившем тогда в большинстве лицеев Парижа. Я убежден, что именно тогда в его сердце пустили корни чувства, которые составили credo его жизни: он до своего последнего дня оставался выучеником лицея Louis le Grand 1824 г.

Этот моральный кризис не мешал, впрочем, его работе: он занял еще более высокое место в классе и получил при окончании третьего класса первую награду за латинские стихи и три похвальных листа; один похвальный лист — за перевод с греческого на общем конкурсе — поставил его в ряду наиболее обещающих учеников лицея. Только во втором классе появились первые признаки усталости и отвращения к школьной работе; он получил в лицее всего четыре похвальных листа. Вероятно, он также болел в течение этого года; чтобы поправить его здоровье и упрочить успехи, директор предложил ему остаться на второй год во втором классе. В письме, которое он написал отцу Галуа, он считает, что ребенок не обладает еще достаточно зрелым суждением и неправильно оценивает истинное значение наград и общего конкурса: еще один год во втором классе откроет ему глаза на его настоящие интересы [1]). Я полагаю, что директор не видел, в чем болезнь Галуа, и не нашел нужного лекарства.

Этот директор, Лабори, преемник Берто, был прекрасным человеком; но он был довольно ограничен. Конгрегация

[1]) Архив лицея Louis le Grand. (См. ниже «Документы».)

поставила его директором, главным образом, потому, что он был старым шуаном; он имел самую низкую ученую степень, полученную перед революцией в университете города Perpignan; как бравый капитан жандармерии он твердо и решительно исполнял приказы, и ничего другого от него не надо было и требовать; разобраться же в том, что происходило в такой голове, как голова Эвариста, он был совершенно неспособен; он не видел ничего кроме соревнования, что могло бы побудить ученика предпочесть работу безделью. Он не замечал, что в интеллекте Галуа происходит какой-то скрытый перелом, что ребенок устал от школьных упражнений, которыми хотели ограничить его деятельный дух, и в момент, когда появились некоторые признаки этого утомления, он хотел заставить его пройти вторично постылый и нудный путь.

Отец Эвариста вначале воспротивился и после каникул в 1826 г. Галуа перешел в класс риторики. Его работу оценили как посредственную, поведение — как рассеянное, а ум — как слишком юный, чтобы пребывание в этом классе принесло ему пользу; ему пришлось в январе уступить настояниям директора: он вернулся во второй класс в отделение Сант-Марк-Жирардена; там он вновь проявил большую успешность и без малейшего к тому усилия. Его повадки казались руководителю очень странными: если тема письменной работы ему не нравилась, то он эту работу либо делал на скорую руку, либо совсем не делал; в приготовлении уроков он не знал никакой середины: либо очень хорошо знал их, либо совсем не знал; он посвящал по-настоящему только последние две недели года проработке классного материала. Этого, без сомнения, было достаточно для удовлетворения его самолюбия, так как помимо вторичной награды за перевод с греческого он получил похвальные листы по четырем другим предметам и похвальный лист за перевод с греческого на конкурсе. Это уже было много, если вспомнить, что дублированный

второй класс был для него годом интеллектуального кризиса, как четвертый — морального.

Классы математики не существовали в то время самостоятельно, как теперь; они занимали только часть времени у своих учеников и составлялись из учеников различных старших литературных классов, согласно способностям, склонностям и видам на будущее каждого. Галуа воспользовался своим возвращением во второй класс, чтобы поступить одновременно в первый подготовительный математический класс. Там не замедлили обнаружиться его исключительные способности. Его старый соученик Людовик Лалан рассказал мне, что едва Галуа попалась в руки «Геометрия» Лежандра, как он ее прочитал с начала до конца, как другой прочитал бы роман, и когда он ее кончил, то весь длинный ряд теорем так полно, ясно и прочно остался у него в памяти, что другому это далось бы лишь после усиленных двухлетних занятий. В этой области умозрений его ум никогда не знал усилий; одним взмахом он оставлял низины, чтобы подняться к вершинам. Заметка в «Magasin pittoresque» за 1848 г., написанная, вероятно, его товарищем Фложергом [1]), сообщает нам, что элементарные книги по алгебре никогда не удовлетворяли Галуа, так как он не находил в них духа исследования: с первого года обучения в математическом классе он прибегнул к Лагранжу; он воспитался, как алгебраист, на классических работах этого великого математика: на «Résolution des équations numériques», на «Théorie des Fonctions analytiques», на «Leçons sur le calcul des Fonctions». Он уже, без сомнения, с трудом переносил руководство своего преподавателя Вернье, и, хотя последний должен был отметить его рвение, он получил лишь второй похвальный лист по своему классу, но зато получил награду

[1]) По словам Людовика Лалана. Брат Людовика Лалана, Леон Лалан был на специальном математическом вместе с Галуа.

на общем конкурсе. Он, наконец, вступил в эту новую область, смутное желание работать в которой, оторвавшее его от литературных занятий, было у него уже около года; он вступил в эту область как победитель, к изумлению своих товарищей и учителей; он сам испытывал огромную гордость, в то время как его с головокружительной быстротой увлекало желание итти вперед и отдать этой области все свои способности. К этому времени вся его семья заметила перемену его характера: он стал сосредоточенным и мало общительным. В лицее его манеры становились все более и более странными: еще в начале года его руководитель находил его «очень мягким и преисполненным невинности и хороших качеств», но не мог не отметить у него некоторых странностей; в конце второго семестра он дает ему оценку оригинального и своеобразного мальчика, не злого, но фрондирующего и странного, любящего противоречить и задирать своих товарищей; наконец, последние замечания обвиняют его в скрытности характера, ставят ему в упрек честолюбие и аффектированную оригинальность, которые совершенно отделяют его от товарищей. Читая эти замечания, кажется, что присутствуешь при превращении, вызванном в ребенке откровениями математики; изо дня в день он все больше погружался в свои уединенные размышления, из которых выходил лишь порывами. Учителя и товарищи, вероятно, страдали от его характера, и особенно от очень высокого, хотя и вполне справедливого, мнения, которое у него создалось о себе самом.

Совсем другое было в следующем году. Он перешел в класс риторики Пьерро и Дефоржа и в то же время на второй подготовительный год математического класса под руководством Вернье. Примечания двух первых — сплошной ряд ламентаций: «Его способности, это не более как легенда, которой пора перестать верить; — в его работах, когда он их соизволит сделать, нет и следа чего-либо другого кроме причудливости и небрежности; — он всегда

занят тем, что не требуется, он даже аффектирует это; — он изводит своих учителей беспрестанной рассеянностью; — он с каждым днем опускается все ниже». Ясно, что усталость переходит у него в отвращение и что отныне он целиком поглощен математикой. Заметки Вернье в этом отношении еще выразительней, чем заметки преподавателей класса риторики: этот руководитель был очень высокого мнения о способностях Галуа, которые казались ему из ряда вон выходящими как в гуманитарных науках, так и в математических; сначала он пытался заставить Галуа согласиться на такое распределение времени, чтобы оставалось время и для литературы, но, несмотря на обещание Галуа, этот план не был выдержан; отныне руководитель считал его поведение очень плохим, а его самого скрытным, самолюбивым с нестерпимо аффектированной оригинальностью. Но вот буквальные его слова: «*Страсть к математике владеет им*; я думаю, для него было бы лучше, если бы его родители согласились, чтобы он занимался только этой наукой: здесь он теряет свое время и только изводит своих учителей и навлекает на себя наказания».

Именно к этому году относится одно из наиболее интересных сообщений, опубликованных в 1832 году Огюстом Шевалье в «Revue encyclopédique». «Шестнадцати лет, — пишет он, — Галуа при решении общего уравнения пятой степени совершил ту же ошибку, что и Абель». Присутствие подобного ученика совершенно ставило втупик Вернье; тщетно он пытался его удержать, Галуа от него ускользал, и этот отличный человек все чаще и чаще упрекал его в том, что он губит свои успехи, работая без метода; в конце года он дал ему только седьмую награду. Но это совершенно не имело значения для Галуа: будучи всего лишь учеником подготовительного отделения, он совершенно самостоятельно подготовился к экзаменам в Политехническую школу, к которым можно было приступить лишь после года на элементарном и года на специальном классе, и пытался посту-

пить в нее; но он потерпел неудачу. Этот удар огорчил его и явился первой из несправедливостей, которые в конце концов отравили его жизнь [1]). Действительно, одним из следствий его страстного увлечения математикой было пылкое желание поступить в Политехническую школу, где, он это заранее чувствовал, нашли бы применение все силы и энергия его ума и сердца. Не была ли она в одно и то же время лучшей школой математики и дочерью революции, оставшейся верной своему происхождению, несмотря на все усилия принцев и королей привязать ее к их династии? Не по ее ли примеру равнялись мысли всей либеральной молодежи? И когда в стенах своих ненавистных классов воспитанники лицеев подымали мятеж, не брали ли они пример со своих старших братьев из лицея Наварр, этих великих и отважных юношей, которые одним своим пением наводили трепет на двор и церковь? Все влекло Галуа к Политехнической школе: он чувствовал свое предназначение; она была создана для него, как он был создан для нее.

Он захотел вторично явиться на экзамен и, перескочив элементарный класс математики, после каникул 1828 г. перешел прямо в специальный класс математики.

В этом классе тогда преподавал человек, имя которого пользовалось глубоким уважением у всех, кто был близок с ним: Ришар был действительно умом, способным верно оценить талант Галуа. Он умел, — говорит заметка, которую О. Теркем напечатал о нем в 1849 году в Nouvelles Annales de Mathématiques, — он умел подыматься выше официальных программ: усердный слушатель Шаля в университете, всегда в курсе успехов науки, вопросами, которые он ставил, он стремился расширить ум, а не сузить его: он угадал в Галуа гений, предназначенный исследовать все глубины науки и распространить ее область. «Оригинальные решения, которые этот блестящий ученик давал на

[1]) Magasin pittoresque.

поставленные вопросы, — со своей стороны говорит заметка Фложерга в Magasin pittoresque, — объяснялись его соученикам со справедливыми похвалами по адресу автора, и Ришар во всеуслышание заявлял, что он должен быть допущен вне общего порядка в Политехническую школу». Он дал ему первую награду. На общем конкурсе Галуа получил четвертый похвальный лист за сочинение, которое, как меня уверяли, отличалось от сочинения Брове, получившего первую награду, только тенденцией к обобщению, что одно уже ставило его выше уровня ученических работ.

В архиве лицея Louis le Grand сохранились триместровые отметки Ришара о Галуа; они совершенно просты: «Этот воспитанник имеет явное превосходство над всеми своими соучениками»; он «работает только в высших областях математики».

Действительно, в этом году Галуа опубликовал свой первый мемуар, *Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях*, в тетради Annales des Gergonne от первого марта 1829 г. Он сделал также свое первое сообщение в Академию наук. «В том же году, — говорит Огюст Шевалье [1]), — *семнадцати лет* Галуа сделал чрезвычайно важные открытия в теории уравнений. Коши взялся представить Академии наук извлечение из теории юного ученика лицея; но он забыл о нем; отрывок был потерян для автора, который тщетно требовал его в секретариате академии: его затеряли. Недостаток внимания, проявленный академией в отношении его первой работы, отданной туда на отзыв, начинает собой ряд все более сильных огорчений, которые следовали одно за другим до самой его смерти».

Если бы он мог по крайней мере всецело посвятить себя своим математическим исследованиям! Но нет: другие обязанности, накладываемые работой и дисциплиной, шли наперекор этому; у него уже не было курса литературы,

[1]) Revue encyclopédique.

но был класс физики, и это было другим предметом раздора между администрацией лицея и им. Последняя не могла примириться с заметкой «отсутствие работы», которую преподаватель Тией регулярно вписывал в конце каждого триместра перед фамилией Галуа: она настаивала на том, что это было его преднамеренной причудой, быть может, даже она не вполне ошибалась, и во всяком случае это суждение все более и более обостряло ее отношения с Галуа. Происходили постоянные резкие скачки между периодами усердия, когда он погружался в свою работу и одновременно уступал требованиям дирекции лицея, и периодами упадка напряжения, когда упреки ожесточали его дух фрондера, а дисциплина налегала всей своей тяжестью на его плечи, всегда готовые к возмущению. Два несчастья окончательно испортили все и истрепали его нервы.

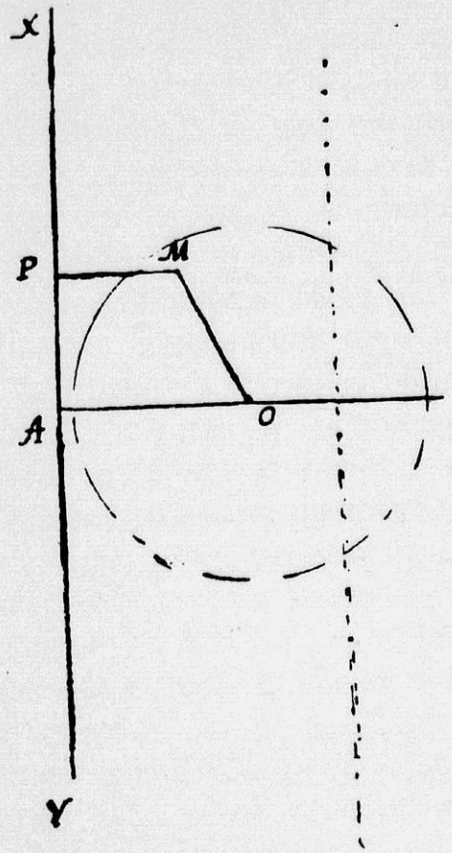
Его вторая кандидатура в Политехническую школу не была счастливей первой.

Ему было отказано в приеме после экзамена, оставшегося легендарным. Двадцать лет спустя, мы находим отзвук возмущения, которое вызвал этот неуспех у всех знавших Галуа, в одной заметке в Nouvelles Annales de Mathématiques: «Кандидат высокой интеллектуальности был провален экзаменатором низшего интеллекта. *Barbarus hic ego sum quia intelligor illis* [1])!» Кто не понял Галуа? Был ли это Бине или Лефебюр де-Фурси? Я не знаю, но предание говорит, что после спора, в котором один из них был неправ, выведенный из себя кандидат бросил в экза, менатора тряпку для стирания мела. Подобный жест гнева- вероятно, был также жестом отчаяния: Галуа видел, что жизнь, о которой он страстно мечтал, ускользала от него навсегда.

В это же самое время он потерял при трагических обстоятельствах своего отца.

---

[1]) Я варвар, так как меня понимает другой. (*Ред.*)



1ère Question. Une surface sphérique est une surface de cylindre droit à base circulaire étant donnée et se coupant dans une courbe, qu'on suppose que de tous les points de cette courbe on abaisse des perpendiculaires sur le plan passant par le centre de la surface sphérique et par l'axe de la surface cylindrique et on demande l'équation de la courbe qui passe par tous les points où il est rencontré par ces perpendiculaires, et de quelle espèce est cette courbe.

1ère Solution. Soit O le centre de la sphère, XY l'axe du cylindre, R et r les rayons respectifs de la sphère et du cylindre si l'on projette sur le plan OXY l'un quelconque des points de l'intersection de la sphère et du cylindre, et que la projection de ce point soit M, il est clair que le carré de la projetante sera égal à $R^2 - \overline{OM}^2$ et à $r^2 - \overline{PM}^2$, (PM étant la perpendiculaire abaissée du point M sur XY), parce que le point projetant M est la projection appartenant à la fois à la sphère et au cylindre. On aura donc

$$R^2 - \overline{OM}^2 = r^2 - \overline{PM}^2 \qquad \text{ou bien}$$

$$\overline{OM}^2 - \overline{PM}^2 = R^2 - r^2$$

Ainsi la différence des carrés des distances du point M à une droite et à un point est constante, la courbe en question est donc une parabole, cette propriété n'appartenant qu'à ce genre de courbe.

Pour avoir son équation, prenons pour axe des x la perpendiculaire AO, et pour axe des y la droite XY. Soit AO = a

On aura $\overline{PM}^2 = x^2$. $\overline{OM}^2 = (x \pm a)^2 + y^2$. D'où

$$\overline{OM}^2 - \overline{PM}^2 = y^2 - 2ax + a^2 = R^2 - r^2$$

C'est l'équation cherchée.

НАЧАЛО КОПИИ РАБОТЫ ГАЛУА НА ОБЩЕМ КОНКУРСЕ 1829 г.

Борьба между либералами и духовенством вследствие выборов 1827 года стала везде крайне интенсивной; повсюду враждебное отношение короля к министерству Мартиньяка, возбуждая смелость реакционной партии, усилило напряженность общественной жизни. Один молодой священник, недавно назначенный в приход города Bourg-la-Reine, занял позицию, враждебную мэру, который в течение 15 лет умел сохранять свою независимость. Он соединился с одним из помощников мэра для того, чтобы сместить Галуа: составилась интрига, были пущены куплеты одновременно глупые и непристойные, приписанные мэру, клевета тем более коварная, что в стихах был выставлен в смешном виде один из членов его семьи. Заговор слишком скоро достиг своей цели; мягкая натура Галуа не имела сил бороться с этими нападками: он стал страдать манией преследования и 2 июля, воспользовавшись отлучкой жены, он покончил с собой, задохнувшись от угара в своей парижской квартире на улице Beauvais в двух шагах от лицея Louis le Grand. Эварист провожал прах своего отца. Он следовал за гробом от церкви Saint Étien du Mont, куда священники согласились принять тело самоубийцы, до кладбища Bourg-la-Reine, где муниципальный совет предоставил могилу; население местечка сопровождало своего мэра до шоссе Bagneux; гроб сняли с катафалка и несли на руках в продолжение полулье; перед церковью, где духовенство ожидало процессию, произошли волнения: кюре был оскорблен и ранен камнем в лоб. Галуа был опущен в могилу в присутствии своего сына среди бури разыгравшихся политических страстей [1]).

В душе Эвариста эта катастрофа, сопровождавшаяся таким зрелищем, оставила глубокий след. Он тем более энергично ненавидел несправедливость, что считал себя ее

[1]) По сведениям, доставленным различными членами семьи.

жертвой; смерть и похороны отца еще обострили эту ненависть ко всему низкому и несправедливому. Считая себя, подобно своему отцу, жертвой преследования и доведенный до отчаяния, он поступает в Приготовительную школу за невозможностью попасть в Политехническую.

Он был зачислен туда 25 октября 1829 г. вторым в списке пяти учеников, принятых на отделение наук; он шел туда как бы в ссылку.

Чтобы судить о разнице между Политехнической школой и Приготовительной школой, нужно вспомнить, что последняя существовала тогда всего три года: ничтожная и бледная копия прежней Нормальной школы, упраздненной в 1822 г., она не имела собственного существования, отделенного от существования лицея Louis le Grand, в котором она помещалась и с которым имела одного общего директора. Со времени министерства Ватимениля она получила, правда, директора по учебным делам Гиньо, и перевела свои аудитории и дортуар в переданное ей здание коллежа в Plessis, не занятое квартирами преподавателей; и тем не менее она была не больше, как продолжением лицея, где должны были готовиться вдали от внешнего шума и в безопасности от страстей, волнующих мир, кандидаты на звание преподавателя. К счастью, действительность не соответствовала вполне букве устава. Трудно было ожидать, чтобы общество молодых людей, добровольно посвятивших себя занятиям, как бы ограничено и связано оно ни было, не стало бы в тот период очагом либерализма; а с другой стороны, редко бывает, чтобы режим, осужденный судьбой, сам не делал промахов, портящих его дело: Приготовительная школа не была такой, какой мечтал ее видеть ее основатель монсеньёр Фрейсину. По выбору сомнительной проницательности или забавной игре случая, одним из первых пастырей, приставленных охранять незапятнанную паству, был карбонарий Арман Марра, и понадобился целый год, чтобы он оказался на подозрении. Меня трудно убедить,

что этот элегантный революционер ограничивался тем что, развлекал своих воспитанников, распевая им под гитару пиренейские песенки; конечно, вряд ли в Приготовительной школе была основана, как в Политехнической школе, карбонарийская вента, но было бы очень странно, если бы за четыре года до 1830 будущий главный редактор «Трибуны» не посеял на своем пути ростков, которые принесли бы после него плоды. Это, впрочем, и было видно, когда Гизо, Вильмен, Кузен появились на своих кафедрах факультета литературы, курс которого обязаны были прослушать все воспитанники Приготовительной школы; они не имели более пылких слушателей, чем эти молодые люди, набранные главными инспекторами с такой заботливой осторожностью, с такой гарантией их принципов, со столькими доказательствами их преданности религии и королю. Впрочем, допущение Галуа лучше всего доказывает, насколько были иллюзорны эти гарантии: он только что провел пять лет в лицее, находившемся под влиянием конгрегации, он пять лет был под наблюдением Лабори, и никто не подозревал о политических страстях, которые уже бушевали в его сердце, и никто не угадывал, что вера умерла в нем; никогда отметки о его поведении в церкви не ставили ему на вид ничего кроме простой рассеянности. С другой стороны, это ослепление руководителей может быть объяснено только внешней сдержанностью воспитанников; режим лицея был режимом лицемерия, искупаемого время от времени возмущениями. В этом отношении этот режим продолжался в Приготовительной школе, и Галуа, поступив в нее, не оставил среду, к которой он проникся отвращением.

Он ее тем менее оставил, что еще не был баккалавром и устав школы обязывал его слушать курс философии в коллеже; он, впрочем, не мог быть окончательно принят, пока не получил степени баккалавра литературы и математики. Первое стоило ему некоторого труда; потерпев неудачу первый раз 2 декабря, он получил степень 14-го, плохо выдержав

испытания по литературе, но с двумя «очень хорошо» по математике и физике. Пятнадцать дней спустя Франсур, Ашетт и Лефебюр де-Фурси признали его баккалавром математики двумя белыми шарами и одним красным [1]).

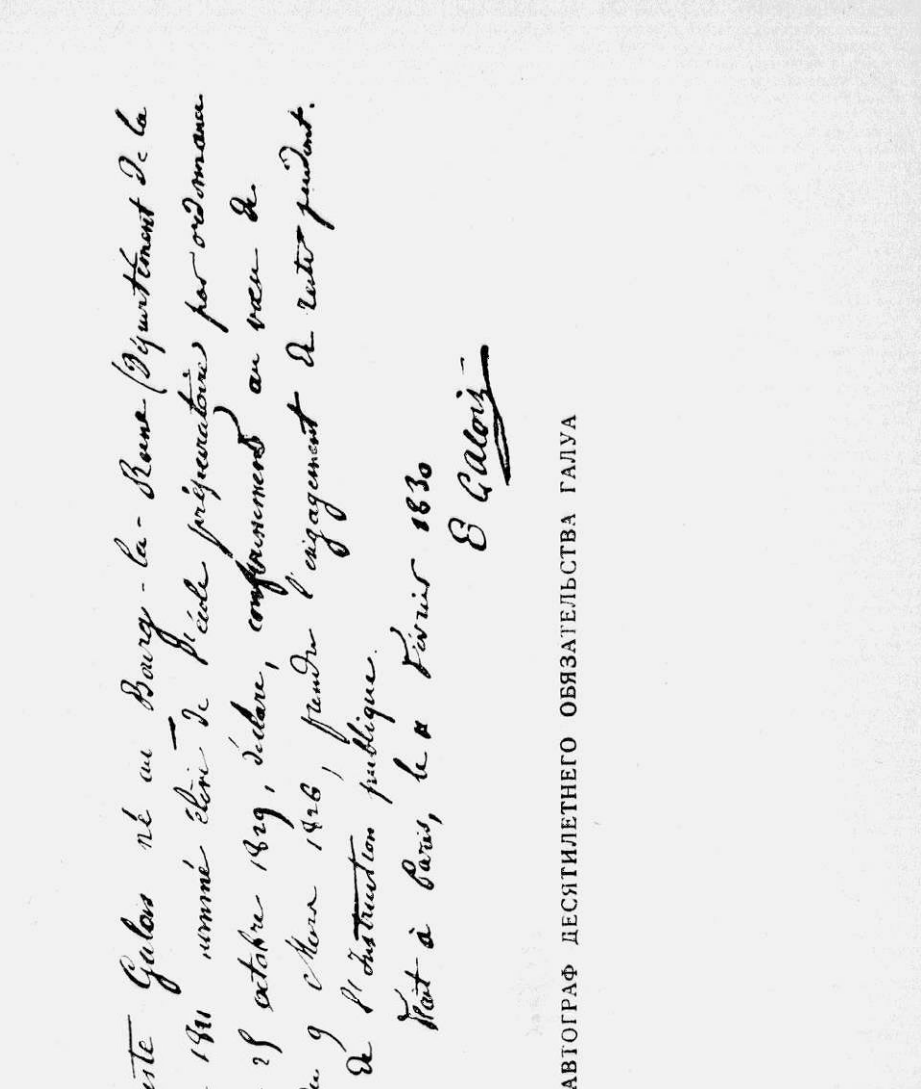
Степень баккалавра не была единственным условием его окончательного принятия. Первый список принятых был составлен по результату письменных сочинений, которые не были одинаковы для всех учебных заведений; устный проверочный экзамен, происходивший в самой школе, позволял руководителям семинарских занятий отстранить молодых людей, казавшихся им недостаточно подготовленными. Это последнее испытание, которому Галуа подвергся в декабре 1829 г., едва опять не окончилось плохо для него. Правда, Лерой дал ему по математике 8 из 10 с таким замечанием: «Этот ученик иногда допускает неясности в изложении своих мыслей, но он обладает способностями и обнаруживает исключительный дух исследования. Он сообщил мне новые замечания по прикладному анализу». Но Пекле, который экзаменовал его по физике, совсем рассердился: «Это единственный ученик, — заявил он, — который плохо отвечал мне; он абсолютно ничего не знает». До сих пор нет ничего удивительного, так как Галуа ничего не делал в классе Тиея; но нельзя удержаться от улыбки, читая дальше: «Мне сказали, что этот ученик обладает математическими способностями; это меня очень удивляет, так как, судя по экзамену, я его считаю мало способным; разве что он свои способности так старательно скрывает, что я не смог их открыть; если этот ученик действительно таков, каким он мне показался, то я сильно сомневаюсь, что он когда-нибудь станет хорошим преподавателем» [2]).

Я полагаю, что не нужно злоупотреблять откровенностью этого замечания, чтобы не повредить памяти Пекле:

---

[1]) Архив факультета литературы и факультета наук.

[2]) Архив Нормальной школы.



АВТОГРАФ ДЕСЯТИЛЕТНЕГО ОБЯЗАТЕЛЬСТВА ГАЛУА

Галуа имел привычку работать почти исключительно про себя, и он находился в затруднении, когда должен был отвечать у доски даже по математике. Но одновременно с этой застенчивостью он обладал слишком плохо скрытым презрением ко всякому, кто сразу и охотно не преклонялся перед его превосходством; если он составил себе предвзятое мнение, то его нельзя было переубедить; он находил как бы болезненное удовольствие в унижении и опорочении противоположного мнения и не шел ему ни на какие уступки. Действительно, эта черта часто встречается у людей, полагающих, что они имеют основания жаловаться на преследование, и они даже с трудом обошлись бы без нее и в случае надобности сами бы ее вызвали. Это – тоже способ насмехаться над людьми и способ не менее заманчивый, чем выказывать себя глупым в глазах других. Все эти черты были у Галуа; на это есть указание в его политических процессах; и меня бы не удивило видеть в этом ловушку, расставленную для Пекле, в которую, впрочем, рисковал попасть сам Галуа. На этот раз он ее избежал, был окончательно принят и подписал 20 февраля 1830 г. десятилетнее обязательство, которое его связывало с университетом [1]).

В Приготовительной школе Галуа ничего не изменил в методах работы, которые так восстанавливали против него администрацию лицея Louis le Grand; он не скрывал своего презрения к учителям, едва слушал их лекции, работал не для них, а для себя. Экзамены на степень лиценциата мало его заботили, и в замешательстве, последовавшем за июльской революцией, он сдал их без затруднений, позволив себе даже роскошь лучше сдать экзамены по физике, чем по математике [2]). Все это ничего не значило; его интеллектуальная активность делилась только между политическими событиями, которые со времени конституции министерства

---

[1]) Архив Нормальной школы.

[2]) Там же.

Полиньяка заставляли предвидеть решительный кризис, и его математическими исследованиями, которые он усердно продолжал. Bulletin de Férussac впродолжение первой половины 1830 г. издал три его мемуара: в апреле «*Анализ одного мемуара об алгебраическом решении уравнений*», в июне «*Заметку о решении численных уравнений*» и один «*Мемуар по теории чисел*». В примечании, сопровождавшем этот последний мемуар, указывалось, что он составляет часть исследований Галуа по теории перестановок и алгебраическим уравнениям. Совокупность этих исследований была представлена в январе месяце в Академию наук на конкурс первой премии по математике. Галуа,– говорит Лиувилль,— работал над ними со школьной скамьи, и, согласно одной заметке в Magasin pittoresque, даже до поступления в класс Ришара. Рукопись была вручена непременному секретарю академии Фурье, который умер, не рассмотрев ее; среди его бумаг она не нашлась. После прошлогодней забывчивости Коши, это был удар судьбы, который поверг бы в отчаяние и в гнев молодого человека даже менее убежденного в своей ценности, чем Галуа. В этих повторяющихся злоключениях он видел действие не случая, а плохой социальной организации, которая осуждала гений на вечные несправедливости к выгоде посредственности; он считал ответственным за это режим политического гнета, против которого собиралась буря. Он ненавидел его не только той ненавистью, которая пылала в сердцах всего либерального юношества, он его ненавидел также за все то, что претерпел со времени первой неудачи с Политехнической школой до потери его второго мемуара в Академии наук. Какую он должен был испытывать радость, когда, на другой день после опубликования ордонансов, Globe принесла в Приготовительную школу манифест журналистов и когда по ту сторону высоких стен Plessis он услышал первые выстрелы!

Если бы это зависело только от него, он тотчас бы вышел на улицу. Он, конечно, предложил это своим товарищам;

но, хотя никто из них не поддерживал ордонансы, среди них далеко не царило согласия относительно поведения, которого нужно было держаться при этих критических обстоятельствах. Мало кто из них осмеливался мысленно перескочить к воспоминаниям великой революции; кроме Галуа и, быть может, двух или трех других, в Приготовительной школе не было республиканцев. В их умах почти безраздельно господствовала доктринерская оппозиция, а она не предусматривала насилия. Со времени парламентских выборов Globe из всех сил старалась предугадать вероятные перипетии парламентской борьбы, но не рискуя никакой внеконституционной гипотезой. С момента опубликования ордонансов те, кто хотели сохранить хотя бы крупицы законности, должны были признать, что роспуск палаты депутатов не противоречит хартии; это был тезис, который Казимир Перье поддерживал изо всех своих сил. Следовательно, не удивительно, что аналогичные мысли проникли в умы многих воспитанников Приготовительной школы; кроме того, им благоприятствовало моральное состояние школы. Упразднение Нормальной школы нарушило все традиции; ни у кого не было времени восстановить их после 1826 г.; ученики были слишком малочисленны, чтобы чувствовать себя смелыми, и Галуа казался большинству из них сумасбродом; каждый из них, будучи в силу своего десятилетнего обязательства наполовину чиновником, чувствовал свою будущность во власти своих начальников, и личные интересы беспрерывно противостояли рождению товарищеского духа; время от времени при попытках стать в оппозицию появлялись кое-какие зачатки братства, но без того духа искренности, которым отличались ученические волнения в лицеях; а когда порыв проходил, многие подумывали о том, чтобы по отдельности добиться прощения за буйство общих выступлений, и во всяком случае, даже по признанию Гиньо, директора по учебным делам, несколько учеников были «доверенными его самых тайных мыслей».

Ничего подобного в Политехнической школе! Там учащиеся не интересовались ни правительством, ни своими начальниками, но лишь традициями школы, — священным законом, которому они считали нужным подчиняться [1]); эти традиции в первый же день послали их на баррикады. В Приготовительной же школе никто не осмелился бы выйти без разрешения Гиньо.

Сам по себе Гиньо не был человеком, способным броситься в схватку, исхода которой он еще не знал.

Насильственные революции были не в его натуре, и как бы он ни был независим от правительства, вполне вероятно, что вида одной медвежьей шапки гренадера на башнях собора Notre Dame было достаточно, чтобы держать его в почтении. Конечно, его сокровенные чувства были враждебны ордонан ам, и 26-го он это сказал по секрету нескольким ученикам. Он им сообщил, что между страной и правительством завязывается длительная и ужасная борьба, и сказал, что какова бы ни была судьба школы, их место должно быть на стороне либеральных идей [2]). Но он был далек от мысли, что кризис может разрешиться в три дня вооруженным восстанием. Судите же о его удивлении и смущении, когда он вдруг увидел школу охваченной революционным потоком, который с шумом катился сверху вниз с горы Sainte Geneviève и улицы Saint Jacques. Он узнал, что 27 июля несколько учеников предложили своим товарищам выйти на улицу. 28-го он был в аудиториях с 5 ч. 30 м. утра. Его речь возмутила Галуа. Гиньо хотел,

[1]) Gazette des Écoles.

[2]) Я старался использовать для нижеследующего только рассказ, помещенный в письме ученика Баха, который его опубликовал в декабре месяце, чтобы защитить Гиньо от нападок Галуа. Это письмо было помещено Гиньо в его докладе министру по поводу увольнения Галуа (см. стр. 328).

чтобы каждый ученик дал слово не покидать школы; Галуа отказался и вместе с ним отказался его будущий кузен Бенар [1]).

Тогда он потребовал от них обещания, что они не приведут в исполнение своего плана раньше следующего дня и что они не уйдут, не предупредив его. Он прибавил, что в качестве директора школы он мог бы потребовать вмешательства вооруженной силы, но что все должны знать, насколько далека подобная мера от его взглядов. Наконец, он имел неловкость намекнуть на затруднительное положение, в котором находились военные, принужденные принести в жертву свою присягу или свободу. Эти разговоры показались Галуа отвратительными: отсрочка на завтра казалась ему низостью; угроза вооруженной силой — смешной глупостью. Его убеждения были слишком тверды для того, чтобы ссылка на жалость к солдатам не показалась ему лицемерием. Ночью он без успеха попробовал перелезть через стену, отделявшую двор Plessis от улицы кладбища Saint Benoît [2]). 29-го проход, соединяющий Plessis с лицеем Louis le Grand, оставался упорно запертым, хотя это было в четверг [3]); только вечером в Приготовительной школе узнали об отступлении королевских войск к Сен-Клу и образовании временного правительства; в то же время воспитанники узнали, какое участие принимали Политехническая школа и ее студенты в революции, и что в то время, как их держали под ключом, один из прежних товарищей по Нормальной школе, Фарси, был убит накануне на площади Карусель при атаке Тюильери. Они одни бездействовали в эти три дня, уже окрещенные *тремя славными*, и свобода действий была им возвращена только в момент, когда она им больше не была нужна.

[1]) Подробность сообщена Бенаром.

[2]) Сообщено Бенаром.

[3]) Отдельный выход из Plessis на улицу Saint Jacques был тогда заколочен.

Никогда Галуа не чувствовал с большей горечью, что его неудачи с Политехнической школой испортили ему жизнь: им овладело отвращение и к Приготовительной школе и к Гиньо. После трусливого благоразумия трех дней, шумиха, с которой 30-го все газеты объявили, что Гиньо предоставил своих учеников в распоряжение временного правительства, заставляла его страдать, как отвратительная реклама; он с бешенством видел, что смерть Фарси эксплоатируется людьми, не спустившимися в час опасности на улицу. Если ко всему этому прибавить, что восшествие на престол Луи-Филиппа казалось ему неожиданным ударом, а его политика—предательством, то мы получим представление о силе его чувств в момент окончания первого года школы и начала каникул 1830 г.

Что делал Галуа во время этих вакаций 1830 г.? Я не смог получить никаких точных сведений об этом моменте его жизни, когда, я это, однако, угадываю, у него произошел окончательный перелом. Его кузина M^me^ Бенар вспоминает, с какой мрачной страстью он провозглашал и защищал права масс перед своей семьей. Я не могу отнести эти слова к какой-нибудь другой эпохе его жизни, так как недалеко было то время, когда, целиком поглощенный своими политическими друзьями, он все реже и реже бывал у родных. Вероятно, его склонял [1]) на сторону сен-симонизма его лучший друг по школе Огюст Шевалье, который только что окончил свои два года учения и отказался от преподавательской деятельности, чтобы вступить в новую церковь вслед за своим братом Мишелем. Но хотя сен-симонисты и выражали народным массам симпатию, способную тронуть Галуа, это, однако, не было то братское сочувствие, которого требовало его сердце. Их малое уважение к революционному либерализму, их слишком строгая иерархия общества по заслугам, окончательно оттолкнули республи-

[1]) См. письмо Галуа к Шевалье, стр. 310.

канскую душу Галуа от доктрины, для которой Шевалье хотел его покорить. Революционные общества, организованные для защиты результатов революции 1830 г., подходили значительно больше для того, чтобы пленить его, дать удовлетворение его ненависти и отважным стремлениям. Я не имею на то доказательств, но я убежден, что перед концом вакаций 1830 г. он уже состоял в Обществе друзей народа и что он вступил в него в момент, когда, распущенное по указу, оно тайно вновь образовалось. Я думаю, что это присоединение сильно повлияло на позицию, занятую им по отношению к Гиньо после начала занятий, и приведшую к его увольнению из школы.

II

Чтобы хорошо понять события, которые в декабре 1830 г. привели к исключению Галуа из Нормальной школы (с 6 августа Приготовительная школа вновь приняла это название), нужно еще раз отдать себе отчет в окружающих обстоятельствах и состоянии духа Галуа. В течение последних месяцев 1830 г. в Париже было такое же сильное возбуждение, как в наиболее лихорадочные эпохи великой революции: поведение палаты, избранной перед июльскими днями, пререкания между министрами, желающими проводить политику демократического прогресса, и министрами, требующими политики сопротивления, маневры короля, желающего избавиться от молчаливо принятых на себя в ратуше обязательств, — все, что совершалось или подготавливалось в правительстве Луи-Филиппа, глубоко раздражало народные массы, а вместе с ними, и даже больше чем их самих, всякого, кто искал примеров для Июля не в английской революции 1688 г., а во французской революции 1789 г. Галуа судил об общем положении с таким же гневом, как и вся республиканская партия; к этому присоединялись мотивы более непосредственные и более личные, вызванные университетом и Нормальной школой.

Нигде погоня за местами не проявлялась так резко, как в университетском мире: там на следующий день после революции, еще сильней и громче, чем в каком-либо другом месте, доктринеры заявили: «Мы здесь хозяева!». Кузен, который не показывался в течение трех дней, и, однако, собирался получить награду за июль, Кузен, который во время предыдущего царствования не переставал требовать упразднения Королевского совета народного просвещения, сразу же был туда назначен и одновременно ему было поручено определять направление преподавания философии в лицеях и высший надзор над Нормальной школой. Дюбуа, который во главе Globe руководил хором доктринеров против Карла X, оставил свою газету для того, чтобы пристроиться в генеральной инспекции на место инспектора народного образования, где он считал, что отныне вещи и люди находятся на своих местах. Менее значительные господа в свою очередь расположились по их примеру в университетских уделах, падение которых Ренан наблюдал восемнадцатью годами позже с таким внутренним удовлетворением. Чтобы знать чувства, с которыми молодой человек девятнадцати лет с пылким сердцем и строгим умом, каким был Галуа, присутствовал при этом завоевании университета, лучше принять в расчет не резкие выпады Барбье или Мери, а мнения людей совершенно умеренных. Таков Эжен Бурну, тогда преподаватель Нормальной школы, интимные письма которого в эту эпоху наполнены возмущением: 16 октября 1830 г. он писал Молю: «Мы имеем у власти доктринеров, рассуждающих вдоль и поперек о законном порядке, об опасных утопиях, об агитаторах и так далее, затем очень ловко устраивающихся на важные должности, которые ultra оставили вакантными, и потихоньку восстанавливающих лавочку Карла X... Народ ожесточен значительно сильней, чем когда он выгонял швейцарцев... Я очень хотел бы сказать вам, что я счастлив или хотя бы удовлетворен; но я глубоко огорчен общественными делами; я бы

никогда не подумал, что могу относиться к ним с таким живым интересом, но начало было так красиво, что я увлекся им помимо себя и теперь я страдаю; *desinit in piscem*... Я ничего не делаю, абсолютно никого не вижу. Все мои знакомые стали супрефектами или даже государственными советниками. Меньшая часть их уже заказали себе фраки, чтобы опять хлопотать о месте. Но среди всего этого не огорчайтесь по поводу судьбы нашего друга Кузена. Он захватил Королевский совет, который должен бы был взлететь в воздух вместе с Карлом X... А Сфинкс? О, Mégas! Сфинкс сияет и одновременно мрачен, как миф, выбравшийся из глубин созерцания, чтобы реализоваться в деятельной эпопее. Нужно видеть его, уничтожающего агитаторов, сокрушающего газетных писак, объявляющего войну на смерть опасным утопиям. Он, воистину, забавен!» Кто это Сфинкс? Издатель писем Бурну остерегся нам это сказать. Но по намеку на религиозные занятия кажется, что это сам Гиньо. Он, действительно, не ладил с газетчиками, представленными небольшой университетской газетой, очень смелой и злой, Gazette des Écoles, главным редактором которой был Гияр, преподаватель математики в лицее Louis le Grand. Перед июлем Гияр мужественно вел кампанию против прежнего Королевского совета народного образования, который не смог заставить его замолчать, отрешив его временно от должности; после революции он направил свою оппозицию против нового совета и партии доктринеров: не было никого, на кого бы он так часто и сильно нападал, как на директора Нормальной школы, и именно эта полемика породила инциденты, которые в декабре 1830 г. привели к столкновению Галуа с Гиньо.

Эти инциденты, впрочем, были подготовлены другими инцидентами из внутренней жизни школы: после начала занятий предубеждение, которое директор и ученик питали друг к другу, не переставало расти. Слава и популярность, приобретенные студентами Политехнической школы, как

никогда усиливали в Галуа убеждение, что он упустил свою судьбу. Он был среди тех, кто требовал форму для учеников Нормальной школы, очевидно, в подражание Политехнической школе; Гиньо отказал. В другой раз он и несколько его товарищей добивались вооружения, чтобы упражняться в военных маневрах, опять-таки, как в Политехнической школе; Гиньо опять отказал. Он даже нашел просьбу смешной и высказал это; по этому случаю он говорил о жалком духе, одушевляющем коллежи и грозящем разрушить университет и даже Политехническую школу [1]). Между тем Королевским советом был обнародован новый регламент занятий, согласованный между Кузеном и Гиньо. В глазах Галуа он имел уже тот недостаток, что устанавливал продолжительность учения в Нормальной школе в три года, и таким образом отдалял время его освобождения; кроме того, предписания, касавшиеся отделения наук (впрочем, довольно плохо составленные, так как их пришлось через год переделывать), угрожали свободе, которую он мог сохранять для своей личной работы, пока Нормальная школа была только Подготовительной школой, и угрозы, окружавшие школу, задерживали ее реорганизацию; система переходных экзаменов была особенно чревата угрозами для Галуа. Сильно чувствовалось, что на школу наложена сильная рука, которая не выпустит ее больше. Галуа испытал это на практике: в конце ноября ему было на неопределенный срок запрещено покидать школу.

А в это самое время ученики Политехнической школы собрались в присутствии своего директора Араго для обсуждения и вотирования своего устава, и пением марсельезы заставили ретироваться своего очень благочестивого директора по учебным делам Бине. Контраст между двумя заведениями был решительно слишком силен, место изгнания слишком тесно для Галуа, до мозга

[1]) См. письмо Галуа в Gazette des Écoles, стр. 288.

костей проникнутого тем самым духом, который доставил студентам Политехнической школы популярность и независимость. Его ненависть к Нормальной школе и Гиньо разразилась. Вмешавшись в полемику, которую Гиньо тогда поддерживал против Gazette des Écoles, он направил в эту газету следующее письмо:

3 декабря 1830 г.

Милостивый государь,

Письмо, которое Гиньо поместил вчера в Lycée по поводу одной из статей вашей газеты, показалось мне совершенно непристойным. Я думаю, что вы с поспешностью примете все способы разоблачить этого человека.

Вот факты, которые могут быть засвидетельствованы 46 учениками.

28 июля утром, когда несколько учеников Нормальной школы пожелали итти в бой, Гиньо сказал им, повторив это дважды, что он может призвать жандармерию для того, чтобы восстановить в школе порядок. Жандармерия 28 июля!

В тот же день Гиньо со своим обычным педантизмом сказал нам: Вот много честных людей убито с той и другой стороны. Если бы я был военным, я не знал бы на что решиться. Что принести в жертву, свободу или законность?

Вот человек, который на следующий день осенил свою шляпу трехцветной кокардой! Вот наши либеральные доктринеры!

Знайте также, милостивый господин, что совсем еще недавно ученики Нормальной школы, воодушевленные благородным патриотизмом, явились к Гиньо сообщить о намерении направить министру народного образования петицию о получении оружия и разрешении упражняться в военных маневрах для того, чтобы в случае нужды быть в состоянии защищать территорию. Вот ответ Гиньо. Он так же либерален, как его ответ 28 июля: «Просьба, с которой ко мне

обратились, поставит нас в смешное положение; это подражание тому, что происходит в коллежах: это идет с низов. Я замечу, что когда коллежи обратились к министру с подобной просьбой, то только два члена Королевского совета голосовали за нее, и это были как раз члены совета, не являющиеся либералами. А министр согласился, так как он боялся беспокойного духа учеников, жалкого духа, который, повидимому, угрожает полным разрушением университета и даже Политехнической школы».

Впрочем, мне кажется, что в одном отношении Гиньо с основанием защищается от упрека в пристрастном отношении к новой Нормальной школе [1]*). Для него нет ничего прекраснее старой Нормальной школы, — все в старой Нормальной школе. Недавно мы просили у него форму; он отказал нам в ней: в старой школе ее не было. В старой школе срок обучения был три года; во время основания подготовительной школы третий год обучения признали бесполезным; Гиньо добился его восстановления.*

Скоро по образцу старой Нормальной школы мы будем выходить только один раз в месяц и возвращаться обратно к пяти часам. Так приятно подчиняться режиму школы, составленному Кузеном и Гиньо.

Все в нем говорит о самых ограниченных идеях и самой полной рутине.

Я надеюсь, что эти подробности не будут вам неприятны, и что вы пожелаете их напечатать в вашей уважаемой газете.

УЧЕНИК НОРМАЛЬНОЙ ШКОЛЫ [2])

---

[1]) Это было предметом полемики между Гиньо и Гияром.

[2]) Галуа подписался своим именем; это редактор газеты поместил анонимную подпись (см. «Документы», стр. 325).

Справедливость фактов, изложенных в письме Галуа, подтверждается даже сравнением его с написанным в ответ на него письмом Баха (см. «Документы», стр. 328). Опубликование письма Галуа вызвало самое глубокое смятение среди учеников, которых оно прямо касалось, так как ссылалось на их свидетельство. Никто не сомневался в том, кто был автором: он сам прежде, чем написать письмо, сообщил о своем намерении нескольким товарищам. Последние были немало изумлены, увидев, что он привел свой проект в исполнение. Что делать? Солидаризоваться с ним молчанием казалось им невозможным; но, с другой стороны, протест против его письма не походил ли на косвенный донос? Полное согласие могло установиться не больше, чем в июльские дни.

Я не хотел бы злоупотреблять свидетельством Gazette des Écoles, которое в этом случае может показаться пристрастным, особенно если, как это вероятно, она получила свои сведения от самого Галуа; но зная, как долго в школе длилось возбуждение после его ухода, насколько были остры и многочисленны распри между Гиньо и его учениками, зная также, каково было правление Кузена, покорным прислужником которого был Гиньо, я думаю, что в описании разногласий между учениками Нормальной школы, которое Gazette des Écoles опубликовала в январе 1831 г., после того как Королевский совет утвердил исключение Галуа, содержится много правды: «Ученики отделения наук менее доступны групповому духу, чем ученики литературного отделения, и среди этих последних нужно различать учеников отделения собственно литературы от учеников отделения философии. Последние ярые кузенисты, судящие обо всем так же, как и их учитель: они следуют за ним уже в пренебрежении ко всему, что не находится на высоте науки. Именно в школе они запаслись презрением: они презирают учеников отделения наук; они презирают тех из своих товарищей, которые никогда не сумеют дойти до класса риторики или философии...; они относятся с презрением и

к самому директору, все заслуги которого, говорят они, сводятся к знанию греческого и к составлению записок». Несколько дней спустя письмо, присланное, очевидно, из школы, предлагает Gazette des Écoles к этим различиям прибавить еще различие между учениками первого года и второго года: первые приняты после революции и значительно менее покорны, чем их товарищи. Трудно было достичь согласия в этом маленьком мирке, настолько разъединенном. Был предложен один текст письма в Gazette des Écoles, но единодушие не было достигнуто; без сомнения, многие отказались действовать раньше Гиньо; только четыре ученика настаивали на отправке этого протеста редактору газеты, который отказался его поместить. «Нужно, — сказал он, — одно из двух, либо чтобы письмо было подписано всеми, либо чтобы четверо подписавшихся удовольствовались говорить только от своего собственного и частного имени». Это было 9 декабря; в тот же день Гиньо исключил Галуа из школы. Только на следующий день было написано и отправлено в Gazette des Écoles новое письмо; и из его текста вытекает, что не было полностью установлено согласие между учениками второго года отделения литературы и учениками отделения наук. Первые подписали следующее:

Париж, 10 декабря 1830 г.

Милостивый государь,

Не нам, еще состоящим учениками Нормальной школы, надлежит отражать нападки, направленные извне против нашего директора. Мы вовсе не хотим ни начинать здесь длинной полемики с Gazette des Écoles, ни пробовать опровергнуть ее оскорбления. Но мы чрезвычайно возмущены тем, что один из нас претендует выступать в качестве представителя от всей школы, и утверждать от нашего имени факты, которые мы признаем ложными или извращенными, представленные самым безобразным образом. Мы целиком порицаем как дух, так и форму письма, напечатанного в номере Gazette des Écoles, за 5 декабря. Мы не только не разделяем чувства, которые оно выражает, но мы спешим воспользоваться этим случаем, чтобы засвидетельствовать г-ну Гиньо нашу признательность за то благородство и твердость, с которыми он защищал наши интересы в продолжение всего времени своего управления и в моменты, наиболее критические для школы. Мы заявляем, что мы обязаны ему тем, что пользовались свободой мысли, которую тогда везде старались подавлять, и что его поведение в июльские дни по отношению к нам не противоречило поведению, которого он держался до тех пор. Мы надеемся, сударь, что приняв с такой готовностью обвинение одного из нас, вы с такой же готовностью примете возражение всех других, и что вы поместите наше письмо в ближайшем номере вашей газеты, не заставляя нас прибегать к официальным мерам.

УЧЕНИКИ ВТОРОГО ГОДА ОБУЧЕНИЯ,
ЕЩЕ СОСТОЯЩИЕ В ШКОЛЕ
СВИДЕТЕЛИ СОБЫТИЙ

За этим длинным и пылким «удовлетворением», данным Гиньо учениками отделения литературы, следовал значительно более сухой постскриптум, подписанный учениками отделения наук:

Ученики второго года обучения, не являющиеся свидетелями событий, тем не менее заявляют, что они отказывают автору письма, помещенного в номере Gazette des Écoles от 5 декабря, в свидетельстве, которое он требует от них.

Таким образом в то время как ученики отделения литературы осыпали цветами своего директора и третировали Галуа как лжеца, ученики отделения наук, его непосредственные товарищи, под недопустимым предлогом, что они не были свидетелями событий, ограничились тем, что, не сказав ни слова по адресу Гиньо, подчеркнули лишь бестактность, которую совершил Галуа, публично ссылаясь на их свидетельство, без разрешения на это.

Гиньо во что бы то ни стало хотел убедить всех, что виновный был ему выдан своими товарищами. Он это определенно говорит в своем докладе министру [1]), датированном днем исключения Галуа. «Этот ученик, — пишет он, — был признан виновным как по показаниям некоторых его товарищей, так и по полному беззастенчивости признанию, сделанному после тщетных попыток запирательства». Но не мешает заметить, что несколькими строками ниже он пишет: «Галуа был указан мне, судя по всем *признакам*, как автор письма; я считал, что не подобает оставлять дольше целую школу под гнетом вины одного ученика». Слово «признаки» кажется очень слабым для обозначения обвинения товарищей и признания виновного.

Также странно и то, что Гиньо 9 декабря в другом месте своего доклада уверял министра, что ученики школы с первого момента взяли инициативу единодушного опровержения, тогда как по более обоснованным сведениям безусловно известно, что до 9 декабря единодушие не было достигнуто, и что для опровержения, появившегося 10-го, отделения литературы и наук не смогли принять общей формулировки; 18 декабря в письме, адресованном в газету Constitutionnel, Гиньо еще раз настаивает на инициативе учащихся. Он не имел надобности, — говорит он, — собирать сведения, так как сами товарищи Галуа взяли это на себя и проявили инициативу для защиты чести школы. Но роль Гиньо была значительно более активной, чем он об этом хотел говорить: я нашел доказательства этого в одном частном письме, написанном 11-го одним учеником, тем менее подозрительным, что он принимал энергичное участие в защите директора [2]). «Г-н Гиньо, — пишет он, — несколько

[1]) Национальный архив, папка F [17] 70355 (см. «Документы», стр. 325).

[2]) Это письмо было мне передано сыном этого воспитанника, тоже учеником Нормальной школы.

раз собирал нас у себя и высказывал нам все свое огорчение и в то же время удовлетворение, которое он испытывал, узнав о наших выступлениях для полного его оправдания в глазах общества». Так как единственное возможное выступление — это выступление 10-го, то Гиньо не мог благодарить учащихся каждый раз, когда он их собирал, и за кратким изложением письма легко угадать целую серию переговоров, которые были бы бесполезными, если бы с самого начала все воспитанники школы были единодушны в опровержении Галуа и защите Гиньо.

Наконец, имеется, и мы не можем ею пренебрегать, версия самого Галуа об обстоятельствах, при которых он был исключен из школы. Она совершенно не согласуется с версией Гиньо, и, наоборот, согласуется в целом с основными фактами, которые вытекают из рассмотрения других документов. Согласно Gazette des Écoles от 12 декабря, Гиньо собрал всех воспитанников, затем, обращаясь отдельно к каждому из них, сказал: «Вы автор письма, напечатанного в Gazette des Écoles?». Первые четыре ответили отрицательно; пятый, спрошенный таким же способом, сказал: «Господин директор, я не считаю возможным ответить на этот вопрос, так как это способствовало бы выдаче одного из моих товарищей». Этот ответ, полный благородства и стойкости, вызвал у Гиньо досаду. Затем, обратившись к ученику, более удаленному по порядку, он обвинил его в написании письма, и без дальнейших формальностей запретил ему вход в школу.

Таким образом по этой газетной заметке, очевидно инспирированной Галуа, разногласие между учениками обнаружилось в присутствии самого Гиньо, и удаление из школы было решено не вследствие расследования, произведенного самими воспитанниками, а по доносу некоторых из них или по подозрениям директора и после своего рода публичного расследования, прерванного в самом начале.

Наконец, 30 декабря та же самая газета опубликовала следующее письмо Галуа, обращенное к его товарищам.

Мои товарищи,

В Gazette des Écoles появилось анонимное письмо о нашем директоре Гиньо, подписанное просто ученик Нормальной школы. *Вы сочли должным протестовать против интерпретаций, данных автором этого письма событиям, которых оно касается.*

Ваш протест был подписан лишь после того, как Гиньо по простому подозрению, и, как он сам признался, по предубеждению, питаемому с давних пор, исключил меня из школы, как автора письма.

Ни вам, ни мне не надлежит произнести окончательно суждение о праве, которое присвоил себе Гиньо. Но вы не должны позволять ему взваливать на вас всю ответственность за мое исключение; после того товарищеского отношения, которое я видел с вашей стороны при своем уходе, он смеет заявлять, что вы взяли на себя инициативу моего исключения.

Верно, что перед моим уходом, вызванным отказом мне в материальных средствах существования, вас упрашивали совершить этот акт справедливости, *и хотя ничто не нарушало наше согласие, вам посредством органа классного надзирателя Гайбера советовали воспротивиться моему дальнейшему пребыванию в школе; но вы отвергли эти бесчестные инсинуации. Сделайте больше, мои товарищи: я ничего не прошу у вас для себя! но говорите ради своей чести и следуя своей совести. Вы отклонили ответственность, которую, казалось вам, навязывал вам автор письма. Опровергните же теперь утверждение, тем более несносное, что ваше молчание поддержало бы доводы более сильного. До решения министра ваш соученик и на всю жизнь преданный вам товарищ.*

Э. ГАЛУА

Понятно, это письмо осталось без ответа; но оно чрезвычайно точно и написано тоном искренности, не оставляющим места сомнениям. К тому же оно подтверждается в той

его части, где говорится о прощании, письмом его товарища, о котором я уже говорил.

Это был ученик отделения литературы и философии; он совершенно не знал о значении Галуа и не сделал ни малейшего намека на это: он его представил своему корреспонденту как негодяя с глубоко испорченным и скрытным характером, он его обвинял в коварстве, в жестокой брани, в приписывании лживых обвинений; напротив, Гиньо казался ему самым искренним либералом, какого он когда-либо знал; но он прибавил «но как я был огорчен, когда этот несчастный безумец, выгнанный с позором из школы, пришел попрощаться с нами!». Галуа, следовательно, оставил школу не так, как он это должен был бы сделать, если бы приговор его товарищей с самого начала был произнесен против него, за его исключение.

Галуа покинул Нормальную школу 9 декабря; его исключение было окончательно утверждено Королевским советом лишь 3 января 1831 г. По словам Огюста Шевалье [1]), совет постановил также, что Галуа не теряет ни звания, ни преимуществ воспитанников школы. Это ошибка. Ничего подобного нет ни в черновом наброске постановления, написанном Кузеном на полях доклада Гиньо, ни в реестре постановлений [2]); в действительности было только то, что Вильмен, в душе враг своего друга Кузена, намекал в совете, что все это, быть может, не стоило бы выеденного яйца, если бы газеты не раздули дело, подняв шум вокруг него; кроме того, Пуассон, заинтересованный талантом Галуа, советовал ему восстановить рукопись, потерянную у Фурье, и брался представить ее Академии наук 17 января; и, наконец, министр Барте, поставленный в курс всего, вызвал Галуа и заверил его, что его не станут беспокоить за нарушение десятилетнего контракта.

---

[1]) Revue encyclopédique.

[2]) Архив Министерства народного образования.

Впрочем, Галуа было еще только 19 лет, и он должен был тянуть жребий лишь в 1832 г.; с другой стороны, он вовсе не отказался от преподавания, так как в четверг 13 января он открыл у книгопродавца Кайо, по улице Sorbonne № 5, курс высшей алгебры. «Эти лекции, — объявляла Gazette des Écoles, — будут происходить по четвергам в час с четвертью; они предназначены для молодых людей, чувствующих, насколько неполно поставлено изучение алгебры в коллежах, и желающих глубоко изучить эту науку. Курс будет состоять из теорий, из которых некоторые являются новыми и ни одна никогда не излагалась в публичном курсе. Достаточно будет упомянуть о новой теории мнимых чисел, теории уравнений, разрешимых в радикалах, теории чисел и эллиптических функций, изучаемых с помощью чистой алгебры».

Мог ли Галуа жалеть о своем исключении из школы, вступив сразу в разряд преподавателей? Еще до того, как его исключение было окончательно оформлено, он воспользовался возвращенной свободой, чтобы броситься в самую гущу политической схватки. Борьба была тогда более горячей, чем когда бы то ни было; она поднялась вокруг палаты пэров, которая судила министров Карла X, и учащиеся заняли в ней первое место. Это явилось непреодолимым искушением для Галуа. Из прений его последнего политического процесса вытекает, что, едва выйдя из Нормальной школы, он несмотря на свою молодость поступил в артиллерию национальной гвардии. В самом деле, последняя была 31 декабря распущена королевским указом; как мог бы Галуа, который не числился в ней после ее реорганизации, носить форму 14 июля 1831 г. и считать себя вправе ее носить, если бы он не вступил в нее по всем правилам между 9 и 31 декабря?

Прокуратура, впрочем, и не оспаривала его принадлежности к национальной гвардии. Из четырех батальонов артиллерии два почти целиком состояли из членов Об-

щества друзей народа и все их офицеры были руководителями этого республиканского общества [1]); это заставляет меня предполагать, что Галуа состоял членом Общества друзей народа с каникул 1830 г. Во всяком случае он оказался на их стороне, как только стал свободным, и с тех пор он принадлежал к наиболее деятельной фракции республиканской партии. Без сомнения, он был вместе со своим батальоном во дворе Лувра в тот день, когда был произнесен приговор над министрами и когда Кавеньяк, Трела, Гинар были обвинены в желании передать пушки народу; он участвовал затем, как он сам заявлял об этом в июне 1831 г. [2]), во всех волнениях, которые ежедневно потрясали Париж в продолжение шести месяцев, следовавших за процессом министров.

Я не думаю, что при этих условиях курс высшей алгебры, который он открыл перед четырьмя десятками слушателей, был бы регулярным и продолжительным. С другой стороны, Академия наук подготовила ему новое разочарование: Пуассон через четыре месяца вернул обратно мемуар «*Об одном вопросе общего решения уравнений*», который ему вручил Галуа, и назвал его непонятным [3]). С тех пор Галуа целиком отдался политике: по его собственному выражению, его сердце восстало против головы. С пылом молодости и обычной непримиримостью своего характера он очень скоро достиг крайних пределов возбуждения. «Если для того, чтобы поднять народ на восстание, нужен труп, — говорил он, — я пожертвую собой [4])». Таково было состояние его духа, когда 9 мая 1831 г. он присутствовал на знаменитом банкете в ресторане Vendanges de Bourgogne и навлек

---

[1]) De La Hodde, Histoire des Sociétés secrètes (История тайных обществ).

[2]) Процесс 15 июня (Gazette des Tribuneaux).

[3]) Revue encyclopédique.

[4]) Сообщено его семьей.

на себя цареубийственным тостом свой первый политический процесс.

После роспуска артиллерии национальной гвардии, офицеры, подозреваемые в желании передать свои орудия народу, подверглись судебному преследованию со стороны правительства. Этот процесс, известный под именем «Процесса девятнадцати», привел в суде присяжных к оправданию. Чтобы его отпраздновать, в Белльвилле, в ресторане Vendanges de Bourgogne, 9 мая 1831 года был дан банкет; присутствовало около двухсот республиканцев; многие из протеста против роспуска и реорганизации артиллерии одели мундир артиллериста национальной гвардии, на который они не имели больше прав. К концу ужина одни произносили тосты за революцию 93-го года, за монтаньяров, за Робеспьера, и их приветствовали радостными возгласами; другие — за революцию 89-го года и 1830 года и их ошикали. Один артиллерист вскричал: «За солнце июля 1831 года! чтобы оно было столь же жарким, как в 1830 г. и не ослепило бы нас!». Со всех сторон подхватили: «Скорей! скорей!» Итак, настроение было очень возбужденное, когда Галуа, сидевший у одного из концов стола, встал и, держа в одной и той же руке свой стакан и открытый нож, просто сказал: «За Луи-Филиппа!» Собрание сначала не поняло смысла тоста и ответило градом свистков; но Галуа объяснился, увидали нож, и тогда, в то время как один из приглашенных, Гюстав Друино, удалился, протестуя против подобного тоста [1]), а Александр Дюма и несколько других для того, чтобы не быть скомпрометированными, проскользнули через окно в сад [2]), — большинство присутствовавших громко приветствовало Галуа: ему подражали, подымая руки с жестом угрозы и повторяя: «За Луи-Филиппа! За Луи-Филиппа!» После этого самые молодые толпой спустились

[1]) Gazette des Écoles.

[2]) Александр Дюма, Мемуары.

на бульвар, с криками пронеслись по нему и закончили свой вечер, отправившись танцевать вокруг Вандомской колонны [1]).

Это был первый случай, когда публично была высказана мысль о покушении на короля. Галуа был арестован у своей матери и помещен в предварительную тюрьму Sainte Pélagie. Это сначала вызвало у него первое движение изумления и ошеломление, довольно естественное у молодого человека его возраста: он написал своему другу Огюсту Шевалье: «Я под замком!.. Ты слышал разговоры о случившемся в Vendanges de Bourgogne. Я сделал этот жест... Но не читай мне нравоучений, так как винные пары лишили меня рассудка...» [2]).

Он еще старался оправдать себя; к концу следствия он дал себя уговорить адвокату и своим друзьям, что он скажет, будто прибавил к своему тосту: «если он изменит», и что эта оговорка потерялась среди шума свистков, однако его соседи по столу слышали ее; последние свидетельствовали в том же смысле. Но эта ложь тяготила Галуа, и 15 июня на судебном заседании он публично взял обратно свои слова, несмотря на свидетельство его друзей и свои собственные показания на допросе. Обвинение, которое ему было предъявлено, вменяло ему в вину «подстрекательство в речах, произнесенных в общественном месте и при стечении публики, к покушению на жизнь и личность французского короля, хотя такое подстрекательство и не сопровождалось действием». Поведение Галуа во время прений процесса было агрессивным и ироническим. В своих ответах председателю суда он признал справедливость фактов, в которых его обвиняли; он хвалил удобство своего ножа, который до его тоста

[1]) Как раз на следующий день маршал Лобо пустил в ход на этом самом месте пожарные насосы, впрочем, без большого успеха.

[2]) Revue encyclopédique.

служил ему для разрезывания цыпленка и индейки; он объявил, что его тост действительно явится подстрекательством в случае, если бы Луи-Филипп изменил и преступил пределы законности. «Все, — сказал он, — обязывает нас довести свои предположения до этого конца. Настоящий образ правления может внушить, что Луи-Филипп способен изменить народу, так как он не дал нам достаточно гарантий своей искренности, чтобы мы не опасались этого результата. Все, что мы видим, заставляет нас относиться подозрительно к его лойяльности; его восшествие на престол, задолго подготовленное...» Он, без сомнения, начал бы говорить о клятве в верности, принесенной герцогом Орлеанским при короновании Карлу X, когда адвокат прервал его и иронически попросил председателя не продолжать допрос на такой опасной для короля почве.

Допрос свидетелей не представлял бы интереса, если бы Друино, тот самый, который громко протестовал против тоста, не отказался бы принести присягу и не навлек на себя штрафа.

Было точно установлено, что Галуа не был лишен разума под влиянием винных паров, как он это писал Шевалье; перед каждым приглашенным было только по одной бутылке и большинство из них не были опорожнены; ликера Галуа не пил по той простой причине, что его совсем и не подавали. Что касается «если он изменит», то все его соседи по столу заявили, что они это слышали.

Обвинительная речь товарища прокурора особенно подчеркивала два пункта: он хотел доказать, что Vendanges de Bourgogne является общественным местом и оспаривал, что Галуа сделал какую-либо оговорку в своей угрозе, указывая, что в первой части следствия обвиняемый не говорил об этом.

Перед тем, как дать говорить своему защитнику, Галуа непременно хотел сам представить свои замечания по обвинительной речи. «Я хочу, — сказал он, — возразить на некоторые ошибки, сделанные общественным обвинителем. Во-первых, он возражал против моих ответов на следствии и против корректива «если он изменит». Я должен сказать, что я предпочел уступить желанию судебного следователя, чем подвергнуться опасности просидеть три или четыре месяца в тюрьме. Впрочем, я признаюсь, что, быть может, здесь была и некоторая доля лукавства: вы не можете представить себе радость комиссара полиции, когда он думал, что открыл во мне заговорщика. Он почти считал, что составил на этом свою карьеру; его нужно было вывести из заблуждения. Я не могу обойти молчанием заявление общественного обвинителя, что король не может изменить; никто не имеет теперьглупости верить, что короли безгрешны, особенно после того, как судьи, которые при Карле X преследовали нас за разговоры, что короли могут ошибаться, принесли присягу другому королю, восшедшему на престол вследствие глупости павшего короля». Тут он начал, — писала Gazette des Écoles, — произносить чрезвычайно экзальтированную речь: он сказал, что был среди тех, кто в течение нескольких месяцев несколько раз выходил с оружием на улицы, и что он хотел бы находиться на заседании суда в прошлую субботу, когда на процессе по заговору его друзья оскорбляли свидетелей, судей и присяжных заседателей, заполнили здание суда и встречали свистками и шиканьем распоряжения председателя. Председатель прервал его, заметив, что он сам наносит вред своей защите.

Защита была представлена Дюпоном, одним из обычных защитников обвиняемых республиканцев. Оставив в стороне вопрос о поправке, так как подсудимый сам снял это смягчающее обстоятельство, он, главным образом, дал юридическое опровержение обвинительной речи и поддерживал мнение, что ресторан нельзя рассматривать как общественное место. После обмена оживленными репликами между защитником и товарищем прокурора, председатель резюмировал прения и закончил, как и в «Процессе девятнадцати», аппелируя

к чувствам присяжных заседателей как отцов семейств. Как судья, он был тронут юностью обвиняемого. Таковы же были, без сомнения, и чувства присяжных заседателей, так как им достаточно было 10 минут обсуждения, чтобы вынести отрицательный вердикт. Галуа спокойно встал, спустился к трибуналу, взял со стола вещественных доказательств свой нож, закрыл его, положил в карман и вышел, не промолвив ни слова [1]).

Он не оставался на свободе и месяца. Республиканская партия подготовляла к 14 июля 1831 г. манифестацию: должно было быть посажено несколько деревьев свободы, среди других одно на площади Грев. Считали, что правительство не осмелится запретить это чествование; но накануне префект полиции объявил, что он будет рассматривать манифестацию как бунтовщическую и воспротивится ей. Среди принятых мер предосторожности фигурировал и арест Галуа; его ни в чем не могли обвинить, были лишь убеждены, что он является самым ярым врагом короля. В 6 часов утра комиссар полиции квартала Saint Victoir пришел в дом на улице Bernardins, чтобы арестовать Галуа, который жил там один после своего оправдания; но Галуа уже не было дома. Около половины первого группа молодежи вышла из улицы Тионвиль и направилась к Новому мосту, чтобы итти через Шатлэ на площадь Грев; во главе их были два совсем молодых человека, одетые в форму артиллеристов национальной гвардии и вооруженные карабинами: это были Галуа и один из его друзей, студент права Дюшатле. Новый мост был одним из наиболее охраняемых проходов; полиция дала двум вожакам взойти на мост, затем их сразу же схватили и отделили от остальной толпы, которая была рассеяна. Кроме заряженного карабина на Галуа нашли пистолеты и кинжал.

[1]) Александр Дюма, Мемуары.

Филиппистскими газетами арест республиканца Галуа был провозглашен на всю Францию как крупная удача. Его захватили и на этот раз намеревались не скоро выпустить из рук. Неосторожность Дюшатле дала первый предлог продлить на неопределенный срок их заключение. Они оба были сначала отведены из поста на площадь Дофина в дом заключения при префектуре полиции, и там у Дюшатле явилась мысль набросать карандашом на стенах своей камеры голову короля возле гильотины и под этим надпись: «О, свобода, Филипп положит свою голову на твой алтарь!». Этим воспользовались, чтобы разобрать этот проступок в исправительном суде, прежде чем начать другое дело: мера относительно Галуа незаконная, так как к моменту своего ареста он в действительности еще не совершил никакого проступка и не оказал никакого сопротивления. 26 августа Дюшатле был оправдан по делу о своих рисунках; прокуратура апеллировала и дело поступило опять в суд лишь через месяц; 23 сентября суд подтвердил первый приговор. Прошло более двух месяцев с тех пор, как Галуа был переведен в тюрьму Sainte Pélagie: наконец, согласились заняться им. Но какое обвинение ему предъявить? Сначала подумали о заговоре против безопасности государства: от этого отказались не столько по причине нелепости подобного обвинения, как потому, что оно влекло за собой процесс в суде присяжных, где было вероятным оправдание; три месяца предварительного заключения казались недостаточными для того, чтобы дать удовлетворение за оправдание 16 июня; он должен был получить суровый приговор, а получить его были шансы только в исправительном суде. К несчастью для себя Галуа недостаточно провинился.

23 октября он вместе с Дюшатле предстал перед судом исправительной полиции по обвинению в незаконном ношении военного костюма. Оба подсудимых возражали в свое оправдание, что, принадлежа до 1 января

к старой артиллерии национальной гвардии, они считали себя в праве еще носить форму, как это, впрочем, делали многие из их друзей, не подвергаясь за это преследованиям. Им заметили, что они ошибались, но, очевидно, в неравной степени, потому что Дюшатле отделался тремя месяцами тюрьмы, в то время как Галуа дали вдвое больший срок [1]).

Если верить одному отрывку из дневника его сестры, M^me^ Шантло [2]), этот приговор чрезвычайно поразил Галуа. Он не мог представить себе, чтобы его длинное предварительное заключение не было сочтено достаточным для наказания за такой ничтожный проступок: он имел наивность апеллировать и сыграл таким образом на руку своим врагам.

Напрасно его защитник доказывал, что он в декабре 1830 г. принадлежал к артиллерии; суд не хотел быть добросовестным и постановил, что с того времени как он после реорганизации не входил в состав артиллерии, он совершал предусмотренное статьей 259 уголовного кодекса преступление, отягощенное ношением заряженных пистолетов и карабина. Кинжал, спрятанный под одеждой Галуа, пробудив воспоминание о Vendanges, оправдывал удвоенное по сравнению с его другом наказание.

Этот окончательный приговор был вынесен 3 декабря. Галуа вернулся в тюрьму Sainte Pélagie и был там зачислен в списках осужденных 17 декабря. Срок его заключения должен был истечь лишь 29 апреля 1832 г. «Провести еще пять месяцев без свежего воздуха, это очень печальная перспектива, — писала его сестра, — и я боюсь, что его здоровье сильно пострадает от этого. Он и без того такой усталый. Не допуская никаких мыслей, которые могли бы его рассеять, он приобрел угрюмый характер, который

---

[1]) Gazette des Tribuneaux.

[2]) Сообщенному ее дочерью M^me^ Гинар.

Дорогая тетя,

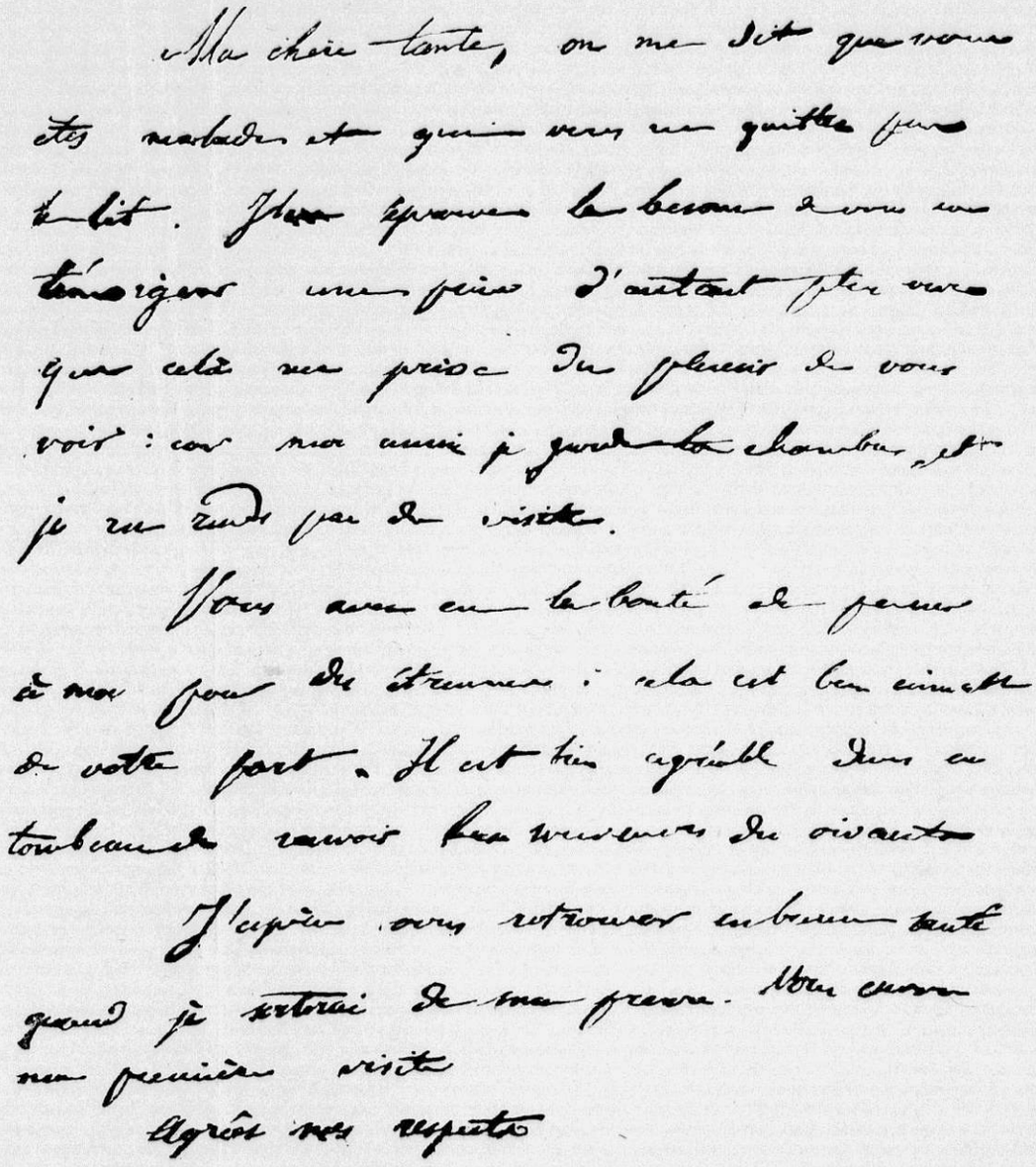
Мне передали, что Вы больны и не встаете с постели. Я чувствую потребность выразить Вам свое огорчение, тем более сильное, что я лишен возможности с Вами повидаться, так как я тоже не выхожу из дома и не хожу в гости.

Вы были так добры, что подумали о подарках мне к празднику. Это очень мило с Вашей стороны. Приятно получить в могиле знак памяти от живых.

Надеюсь с Вами встретиться, когда Вы будете совершенно здоровы и когда я выйду из тюрьмы. Мой первый визит будет к Вам.

С глубоким почтением

Э. ГАЛУА



ПИСЬМО ГАЛУА, НАПИСАННОЕ В ЯНВАРЕ 1832 ГОДА ИЗ ТЮРЬМЫ Sainte-Pélagie ЕГО ТЕТКЕ M^me ГИНАР

его преждевременно старит. У него впалые глаза, как если бы ему было 50 лет».

За исключением восьми дней, когда он был, по неизвестным мне мотивам, перемещен в тюрьму Force [1]), Галуа отбывал все свое предварительное заключение и свое наказание в Sainte Pélagie до 16 марта 1832 г. (дня, когда он был отправлен в больницу).

В Sainte Pélagie режим для политических заключенных был относительно мягкий. На ночь их группами запирали в камерах, расположенных в верхних этажах унылого фасада, возвышавшегося как черный утес над улицей Puits de l'Ermite; она тогда была совсем новой и ослепительной белизны. Днем они могли оставаться в камере, итти в погребок, или прогуливаться по двору, предназначенному для них.

Юноша, совершенно не знавший жизни, очутился там рядом с несколькими товарищами, способными его понять, вроде Распайля [2]), в достаточно смешанной толпе заключенных, захваченных во время бесчисленных волнений, потрясавших Париж с июля 1830 г. Он вновь вернулся к умственной работе, и часто, размышляя часами, расхаживал по двору. Между тем большинство других заключенных проводило свое время в специальном кабачке, терпимом начальником тюрьмы, распивая водку, которую жена одного из заключенных приносила каждый день спрятанной в паре сапог. Они хотели, чтобы Галуа пил вместе с ними. Распайль этим возмущался. «Этот погребок, — пишет он в своих письмах о тюрьмах Парижа, — приводил меня в отчаяние. Наши пьяницы в конце концов увлекают туда все, что мы имеем наиболее великодушного среди

---

[1]) Реестр заключенных Sainte Pélagie.

[2]) Большинство деталей о пребывании Галуа в Sainte Pélagie взято из Lettres sur Prisons de Paris, F.-V. Raspail'я.

наших молодых товарищей. Что! вы пьете воду, молодой человек! о, Занетто, так оставьте партию республиканцев и вернитесь к своей математике! вот посмотрите, этот отважный молодец с таким же изяществом ответит на ваш тост, как и укокошит полицейского... Ну, мой бедный Занетто! вам придется привыкнуть к нам! возьмите для опыта эту рюмку; нельзя быть мужчиной без женщин и доброго вина! Отвергнуть этот вызов — акт трусости; а наш бедный Занетто обладает в своем хрупком теле такой отвагой, что он положил бы свою жизнь за сотую долю самого маленького доброго поступка; он схватывает рюмку с таким же мужеством, как Сократ брал цикуту, он проглатывает ее одним глотком, не без миганья глаз и кривя губы; вторая рюмка проходит не трудней, чем первая. На третьей дебютант теряет равновесие; торжество! победа! честь и слава Бахусу тюрьмы! напоили чистую душу, пигающую отвращение к вину! Пощады этому юноше, такому тщедушному и такому отважному, на лбу которого наука отпечатала на протяжении трех лет глубокими морщинами 60 лет научных размышлений; во имя науки и добродетели, дайте ему жить! через три года он будет ученый Эварист Галуа!»

В другой раз, по словам того же свидетеля, Занетто-Галуа работал, расхаживая по двору, поглощенный мыслями, мечтательный и воздержанный, как человек, которого только тело удерживает на земле и который живет только мыслями. Хвастуны из кабачка крикнули ему из окна. «Эй! наш двадцатилетний старик, вы не только не имеете силы пить, вы боитесь выпивки». Он поднялся наверх, чтобы итти прямо на опасность, осушил одним духом бутылку и затем бросил ее в голову наглого провокатора. Это была бутылка водки! Сначала он спускался, прямо и твердо стоя на ногах, но вскоре Распайль должен был прийти ему на помощь. Галуа с отчаяньем уцепился за его руку, говоря ему: «Как я вас люблю! и сейчас более, чем

когда-либо: вы не напиваетесь, вы воздержаны и друг бедных! Но что происходит во мне? Во мне два человека! и, к несчастью, я угадываю, кто из них одержит верх над другим: я слишком нетерпелив в достижении цели: все страсти моего возраста пропитались нетерпением; сама добродетель имеет у меня тот же порок. Вот смотрите! я не люблю вина; из-за одного слова я, затыкая нос, пью его и напиваюсь допьяна!.. Знаете ли, мой друг, чего мне нехватает? Я могу это доверить только вам: мне нужно кого-нибудь полюбить, но любить только сердцем. Я потерял отца и с тех пор никто его мне не заменил, вы понимаете меня! О! какую услугу вы оказали мне, не насмехаясь надо мной! в какой клоаке мы находимся? и кто отсюда извлечет нас каким-нибудь достойным образом?» Затем последовало бурное опьянение. Пришлось поднять Галуа в камеру и положить на кровать; его потрясали судороги: он поднимался, падал без сознания, опять подымался с новым возбуждением и «пророчествовал такие возвышенные вещи, которые при недоговаривании казались смешными». Он бы убился, если бы его не удержали. Наконец он заснул.

Нет ничего более душераздирающего, чем это повествование Распайля. Я опустил в нем много отвратительных подробностей. К счастью для Галуа, тюрьма не была постоянно такой клоакой, и, не говоря уже об его работе, там каждый день происходили сцены, способные доставить удовлетворение восторженности его души. Каждый вечер, перед тем как подняться в камеры, чтобы быть там запертыми, все политические заключенные собирались вокруг трехцветного знамени: они хором пели патриотические песни и заканчивали марсельезой. При куплете «Amour sacré de la patrie!» все становились на колени; затем с высоты зарешеченных окон юные заключенные, те, кого называли гаменами, уличные мальчишки и беспризорники или бродяги, помещенные вместе с политическими, вися гроздья-

ми на прутьях решетки, в свою очередь, запевали строфу детей [1]); она, казалось, доносилась с неба:

Nous entrerons dans la carrière
Quand nos aînés n'y seront plus;
Nous y trouverons leur poussière
Et la trace de leur vertus.
Bien moins jaloux de leur survivre
Que de partager leur cercueil,
Nous aurons le sublime orgueil
De les venger ou de les suivre!

Когда замирали чистые детские голоса, все, прежде чем разойтись, проходили вереницей перед знаменем и целовали его. Тюремщики могли тогда запирать камеры; каждый уносил в своем сердце чувство, которое его возвышало над самим собой и затушевывало или заставляло забывать страдания и оскорбления тюрьмы. Это должно было быть для Галуа сильным моральным стимулом, звучащим в гармонии с его природным энтузиазмом, со склонностью к самопожертвованию, которой он обладал в такой высокой степени.

Однажды вечером грандиозная сцена имела для него ужасный конец. Прошла едва одна неделя после его прибытия в Sainte Pélagie, когда там стали служить торжественную мессу в годовщину июльских дней. Заключенные захватили катафалк, который возвышался в часовне, перенесли его во двор и 27-го, 28-го и 29-го совершали перед ним церемонию со знаменем. 29-го через несколько минут после того, как они вернулись в камеры, выстрелом, раздавшимся из одной мансарды по улице Puits de l'Ermite, напротив тюрьмы, ранило несколькими дробинками одного заключенного в камере Галуа. На крики его товарищей прибежали сторожа и опустились с раненым и двумя или тремя его товарищами, желавшими дать свои показания начальнику тюрьмы. Галуа был одним из них. С презрительно равнодушным видом, который он часто принимал, когда был взволнован, или когда говорил с людьми, в руках которых он себя чувствовал, он обвинил в выстреле одного тюремного сторожа, который действительно жил напротив. Быть может, он холодно прибавил какое-нибудь оскорбление по адресу начальника, как он это сделал по отношению к своим судьям во время первого процесса; во всяком случае он был немедленно посажен в карцер. Когда утром следующего дня заключенные узнали об этом, они взбунтовались и при помощи гаменов завладели до самого вечера тюрьмой: правительство блокировало Sainte Pélagie войсками; тем не менее ему пришлось обещать, чт Галуа будет выпущен из карцера. Единственным наказанием было удаление детей.

[1]) Последний куплет Марсельезы. (*Прима перев.*)

Во время этого происшествия Галуа еще не был известен персоналу тюрьмы: для них это прежде всего был человек, который хотел убить Луи-Филиппа. В дальнейшем, без сомнения, догадались, кем он был в действительности, и оценили его, так как в момент, когда холера 1832 г. свирепствовала с наибольшей силой, по отношению к нему была оказана очень доброжелательная мера, мотивированная плохим состоянием его здоровья. Его выпустили из тюрьмы 16 марта и отправили в больницу по улице Lourcine. Но он был отмечен судьбой, и сама эта благожелательность стала причиной его гибели. В больнице он был под арестом на честное слово, и здесь он завязал любовную интригу, которая привела его к смерти. Если верить одному намеку Распайля, Галуа отдал свое чистое сердце какой-то кокетке низкого пошиба. Юноша, заявлявший в Sainte Pélagie, что он полюбит лишь женщину, подобную римлянке Тарпейе или Корнелии Гракх, целиком отдался своей первой страсти со своей обычной силой чувств, и нашел и тут все ту же горечь, которую он уже столько раз переживал. Он имел на эту тему переписку со своим другом Шевалье,

который удалился в Ménilmontant, где делил с красноречивым Барро обязанности чистильщика сапог [1]). Шевалье несомненно пытался привлечь Галуа в свое тихое убежище, в котором он наслаждался душевным покоем; он получал ответы вроде следующего письма, датированного 25 мая:

Мой добрый друг, есть удовольствие быть печальным, для того чтобы тебя утешали; действительно, счастье страдать, когда имеешь друзей. Твое письмо, полное апостольской мягкости, принесло мне немного спокойствия. Но как уничтожить след столь сильных чувств, как те, которые пережил я?

Как утешиться, исчерпав в один месяц самый прекрасный источник счастья, который есть у человека, исчерпав его без счастья, без надежды, с уверенностью, что опустошен на всю жизнь!

О! после этого проповедывать мир! Требовать у страдающих людей сострадания к тому, что есть! Сострадание, никогда! Ненависть, вот все. Кто глубоко не чувствует этой ненависти к настоящему, тот не имеет истинной любви к будущему.

Если бы у меня не было убеждения в необходимости насилия, я бы его чувствовал в сердце. Я не хочу страдать, не отомстив за себя.

Не будь этого, я был бы с Вами.

Но оставим это; есть существа, предназначенные, быть может, делать добро, но никогда не переживать его самим. Мне думается я из числа этих людей.

Ты говоришь, что те, кто любят меня, должны помочь мне устранить затруднения, которые мне преподносит жизнь. Те, кто меня любит, как ты знаешь, очень редки. Относительно тебя это значит, что ты считаешь себя обязанным стараться обратить меня. Но мой долг предупредить тебя, как я это делал сто раз, в тщетности твоих усилий.

Я хочу сомневаться в твоем жестком предсказании что я больше не буду работать. Но признаюсь, что оно не лишено правдоподобия. Быть ученым мне препятствует как раз то, что я не только ученый. Сердце у меня восстало против головы; я не прибавлю, как ты: «Это очень жаль».

Прости, милый Огюст, если я задел твою сыновнюю чувствительность, легко говоря тебе о человеке, которому ты себя посвятил [1]). *Мои стрелы против него не были острыми, а мой смех не содержал желчи. Это много с моей стороны при том состоянии раздражения, в котором я нахожусь.*

Я приеду повидаться с тобой 1 июня. Я надеюсь, что в первую половину июня мы будем часто видеться. К 15-му я отправлюсь в Dauphiné.

Весь твой Э. ГАЛУА

Перечитывая твое письмо, я замечаю фразу, в которой ты обвиняешь меня в опьянении гноящейся мерзостью разлагающегося общества, которое оскверняет мое сердце, голову и руки.

Более сильных упреков нет даже в репертуаре сторонников насилия.

Опьянение! Я разочарован во всем, даже в любви к славе. Как может общество, к которому я питаю отвращение, меня запятнать? Подумай хорошенько! [2]).

Таким образом за четыре дня до дуэли, на которой он был смертельно ранен, он разочаровался в своей любви и был более отчаявшимся, еще более раздраженным, чем когда бы то ни было; но он был свободен, так как он предполагал приехать 1 июня в Ménilmontant и отправиться 15-го в Dauphiné. Какой инцидент решил окончательно эту дуэль? Это неизвестно. Кузен Галуа, Габриель Демант писал мне, что на последнем свидании Эварист встретился с каким-то

[1]) Journal de Paris.

[1]) Галуа имеет в виду, без сомнения, Анфантена.

[2]) Revue encyclopédique.

мнимым дядей и мнимым женихом, и каждый из них вызвал его на дуэль.

По свидетельству Распайля, Галуа говорил ему: «Вы услышите, что я умру на дуэли из-за какой-то низкоразрядной кокетки; почему бы и нет? раз она попросит меня отомстить за ее честь, скомпрометированную другими?» Брат Эвариста, Альфред Галуа, которому в 1832 г. было 18 лет [1]), в течение всей своей жизни считал, что Эварист был жертвой личной полиции короля. По мнению Альфреда Галуа, дуэль в самом деле не была честной: тщедушный и близорукий Эварист имел дело с настоящими бретерами, подкупленными для того, чтобы его убить.

Таким образом семья Галуа определенно считала, что дуэль была подстроена полицией. Сам Эварист Галуа, понятно, не питал таких подозрений, так как иначе он несомненно принял бы меры для разоблачения провокации. Наоборот, по его словам, он имел дело с двумя патриотами, и опять-таки по его свидетельству, они были жертвами обмана низкой кокетки: они были искренни. Но Александр Дюма в своих мемуарах определенно говорит, что одним из них был Пеше д'Эрбинвийль, оправданный по «Процессу девятнадцати», и что это он и ранил Галуа. Однако известно, что Пеше наверное не был провокатором: все шпионы, проскользнувшие в царствование Луи-Филиппа в тайные общества, были разоблачены в 1848 г., когда Коссидьер захватил префектуру полиции; свидетелем тому был Люсьен де-ла-Одд. Если бы Пеше был на подозрении, то его не назначили бы тогда хранителем замка Фонтенебло. Таким образом если верно утверждение Александра Дюма, то версия о вмешательстве полиции и о бесчестной дуэли, об убийстве, несколько теряет в своей убедительности.

В печальный день 29 мая, накануне дуэли, уверенный в неизбежной смерти, мысль о которой его часто посещала

---

[1]) Родился 17 декабря 1814 г. (Архив Bourg-la-Reine).

ПОРТРЕТ ГАЛУА,
СДЕЛАННЫЙ ЕГО БРАТОМ
И ОПУБЛИКОВАННЫЙ В 1848 Г.
В MAGASIN PITTORESQUE

«Этот портрет, — говорится в заметке Magasin pittoresque, — воспроизводит насколько возможно точно выражение лица Эвариста Галуа. Рисунок сделан Альфредом Галуа, который вот уже 16 лет создал настоящий культ памяти своего несчастного брата». Этот портрет, следовательно, сделан по памяти 16 лет спустя после смерти Галуа; он совсем не походит на портрет с натуры, репродукция которого напечатана в начале этой книги. Помимо очевидной неумелости художника, нужно признать, что для достижения выразительности он особенно старался передать черту лица, ставшую наиболее поразительной к концу жизни Галуа — его глубоко запавшие глаза, — на которую мы нашли указание в дневнике его сестры M^me^ Шантло. Этим портрет и интересен; но сделанное после вскрытия общее описание черепа, которое найдут в «Документах», стр. 333, находится в полном согласии с портретом, которым я обязан любезности M^me^ Гинар. (См. также в «Документах», стр. 330, тюремная запись в Sainte Pélagie.)

ДЮПЮИ



уже долгое время, Галуа лихорадочно изложил в письме к Огюсту Шевалье результаты своих исследований, которые он считал наиболее важными, беспрестанно черкая на полях: «Я не имею времени, я не имею времени»; после того как он составил таким образом свое научное завещание, он написал республиканским патриотам и двум своим друзьям следующие письма [1]):

29 мая 1832 г.

Письмо всем республиканцам

Прошу моих друзей-патриотов не ставить мне в упрек то, что я умираю не для блага страны.

Я умираю жертвой низкой кокетки. Эта жалкая сплетня погасит мою жизнь.

О! зачем умирать из-за таких пустяков, умирать из-за такой презренной причины!

Я беру небо в свидетели, что лишь по принуждению я уступил вызову и что я его отклонял всеми способами.

Я раскаиваюсь в том, что сказал роковую истину людям, столь мало способным выслушать ее хладнокровно. Но в конце концов я сказал правду. Я уношу в могилу совесть, чистую от лжи, незапятнанную кровью патриота.

Прощайте! во мне было достаточно жизни для общественного блага.

Прощение тем, кто меня убьет, они добросовестны.

Э. ГАЛУА

Письмо N. L... и V. D... [2]).

Париж, 29 мая 1832 г.

Мои добрые друзья,

Я был вызван на дуэль двумя патриотами... мне было невозможно отказаться.

Я прошу у вас прощения за то, что не уведомил ни одного из вас.

---

[1]) Опубликованы Шевалье в Révue encyclopédique.

[2]) Быть может Дюшатле.

Но мои противники потребовали от меня во имя чести, чтобы я не предупреждал никого из патриотов.

Ваша задача очень проста: доказать, что я дрался вопреки желанию, т. е. после того, как я исчерпал все способы к соглашению, и высказать, был ли я способен лгать, даже по такому мелкому поводу, как тот, о котором шла речь.

Храните воспоминание обо мне, раз судьба не дала мне достаточно жизни для того, чтобы имя мое стало известно родине.

Я умираю вашим другом.

Э. ГАЛУА

И внизу этого последнего письма эти слова: «Nitens lux, horrenda procella, tenebris aeternis involuta» [1]), как бы резюмирующие его собственную судьбу такой, как он ее тогда ясно видел.

Дуэль состоялась 30-го утром в очень ранний час возле пруда Гласиер на территории Gentilly. Пуля, поразившая Галуа, была согласно акту вскрытия выпущена на расстоянии 25 шагов: она вошла в живот с правой стороны, в нескольких местах пробила кишки и засела под левой ягодицей. Крестьянин, поднявший его раненым, привез его в половине десятого в госпиталь Cochin [2]).

Галуа еще накануне питал слишком мало иллюзий, чтобы сохранить их после ранения. Он смотрел смерти в лицо. Его юный брат, единственный из всей семьи, был извещен: он поспешил к нему весь в слезах. Эварист попытался успокоить его своим стоицизмом. «Не плачь, — сказал он ему, — я нуждаюсь во всем моем мужестве, чтобы

[1]) Заметка Фложерга в Magasin pittoresque.

[2]) La Tribune. Реестр поступающих в госпиталь Cochin. В заметке Фложерга в Magasin pittoresque говорится, что он был поднят одним старым офицером. Версия, которую я воспроизвожу, сообщена мне Габриелем Демантом.

умереть в 20 лет [1])». В полном сознании он отказался от присутствия священника [2]). К вечеру обнаружилось неизбежное воспаление брюшины и унесло его через 12 час.: в 10 час. утра 31 мая он испустил последний вздох [3]).

«Трибуна» объявила о его похоронах в следующих выражениях: «Торжественные похороны Эвариста Галуа, артиллериста парижской национальной гвардии и члена Общества друзей народа, будут иметь место сегодня в субботу 2-го текущего месяца. Погребальное шествие выйдет из госпиталя Cochin в одиннадцать с половиной часов утра». Две или три тысячи республиканцев сговорились отдать ему последний долг: там были депутации от Школы права, Школы медицины, от артиллерии национальной гвардии, не говоря уже, разумеется, о множестве агентов полиции. В самом деле, префект полиции опасался волнений. Накануне он запретил собрание Общества друзей народа в доме на улице Sainte André des Arts и произвел несколько арестов под тем предлогом, что республиканцы хотели произвести беспорядки во время похорон Галуа. Он сам говорит об этом в своих мемуарах; он уверял также, что если бы генерал Ламарк, находившийся уже несколько дней в агонии, не умер как раз утром 2 июня, то бунт, обагривший кровью Париж пятью днями позже, разразился бы в тот же день на кладбище Монпарнаса. Возможно, что о таких похоронах мечтал и Галуа.

Но все было спокойно. Патриоты удовлетворились тем, что подняли на руки гроб, когда катафалк прибыл к заставе; как некогда тело его отца на дороге из Bagneux в Bourg-la-Reine, тело Эвариста было перенесено на руках его друзей до самой могилы. Было произнесено много речей. Среди ораторов фигурировали двое из главных лидеров

[1]) Сообщение Габриеля Деманта.

[2]) Сообщение аббата Деманта.

[3]) Реестр смертей госпиталя Cochin.

Общества друзей народа, Планьоль и Шарль Пинель [1]).

Так как он был погребен в общей могиле [2]), то ныне не осталось и следа места его погребения.

Но могила по крайней мере не поглотила его целиком: нескольких страниц, оставленных им, достаточно, чтобы человечество знало его имя. Если, как он это говорил, бессмертие есть не что иное, как след, оставленный в памяти людей [3]), то его бессмертие обеспечено, пока будет существовать человечество. Написанием этого очерка я желал присоединить к восхищению перед гением сочувствие пылкой душе и воздвигнуть рядом с именем, которое было представлено только идеями, живой образ человека.

---

[1]) National и Tribune от 3 июня. Смерть и торжественные похороны генерала Ламарка, поглотив внимание прессы, помешали газетам дать какие-либо подробные сведения о смерти и похоронах Галуа.

[2]) Реестр погребений Южного кладбища.

[3]) Сообщено Габриелем Демантом.

ДОКУМЕНТЫ

I

ПИСЬМО ЛАБОРИ, ДИРЕКТОРА ЛИЦЕЯ LOUIS LE GRAND, ОТЦУ ГАЛУА

Архив лицея Louis le Grand,
реестр кореспонденции, I, № 856

26 августа 1826 г.

Милостивый государь,

Ум и способности могут заменить работу, но не в состоянии заместить рассудок, который созревает только с возрастом. Такова, не сомневайтесь в этом, единственная причина неудачи, которую испытал ваш сын в этом году. Г. Роже, с которым я долгое время беседовал на его счет, высказал мне пожелание оставить его на второй год. Хотя я тщетно делал вам несколько раз это предложение, я тем не менее с удовольствием решился на эту новую попытку, так как у меня исчезает всякое самолюбие с момента, когда дело касается блага воспитанника. Итак, хотя бы я должен был испытать новый отказ, я не побоюсь сказать, что эта мера является единственным способом восстановить успехи молодого человека и уберечь его здоровье: пусть, впрочем, он не думает, что его новые соперники допустят его к легкой

победе. Он будет в одном из лучших классов лицея, и я не сомневаюсь, что он должен будет неослабно работать, если захочет удержаться на первом месте. Я надеюсь, что неполучение наград на общем конкурсе и в лицее откроет ему глаза на его истинные интересы.

ЛИБОРИ

II

ТРИМЕСТРИАЛЬНЫЕ ОТМЕТКИ ГАЛУА В ЛИЦЕЕ LOUIS LE GRAND с 1826 г. по 1829 г.

(Архив лицея Louis le Grand.)

1826—1827 г. КЛАСС РИТОРИКИ, ЗАТЕМ ВТОРОЙ КЛАСС И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ КЛАСС

1-й триместр

Учебные отметки. Религиозные обязанности. *Хорошо.*
Поведение. *Хорошее.*
Наклонности. *Счастливые.*
Работа. *Непрерывная.*
Успехи. *Заметные.*
Характер. *Хороший, но со странностями.*

Этот воспитанник, хотя несколько странный в своих манерах, очень мягок и кажется исполненным невинности и хороших качеств. Я имел случай заметить, что им больше руководит честолюбие выдвинуться, чем желание хорошо исполнять задания, чтобы угодить своим учителям.

Риторика

Отметки Камуса. Поведение. *Рассеянное.*
Работа. *Посредственная.*
Отметки Деформа. Поведение. *Хорошо.*
Работа. *Проявляет усердие.*

Это ум слишком юный для того, чтобы успевать в классе риторики.

2-й триместр

Учебные отметки. Религиозные обязанности. *Хорошо.*
Поведение. *Довольно хорошее.*
Работа. *Удовлетворительная.*
Наклонности. *Счастливые.*
Успехи. *Довольно заметные.*
Характер. *Оригинальный и странный.*

Этот воспитанник, который хорошо исполняет большинство своих работ, а некоторые из них — с жаром и охотой, легко падает духом, когда предмет ему не нравится, и тогда он пренебрегает работой. То же самое с уроками, которые он обычно знает хорошо, но которые иногда он вовсе не выучивает. Никогда не бывает, чтобы он плохо знал урок: либо он его совсем не выучил, либо он его знает хорошо. Что касается его личных качеств, то их весьма трудно определить. Он не зол, но фрондер, странный, болтун, любит противоречить и дразнить своих товарищей.

Второй класс

Примечание Сант-Марк-Жирардена. Его работа недостаточно регулярна; поведение сносное.

Математический подготовительный класс

Отметки Вернье. Усердие и успеваемость.

3-й триместр

Учебные отметки. Религиозные обязанности. *Хорошо.*
Поведение. *Сносное.*
Работа. *Неровная.*
Наклонности. *Счастливые.*
Успехи. *Мало удовлетворительные.*
Характер. *Скрытный и оригинальный.*

Этот воспитанник, исключая приблизительно последние две недели, когда он немного работает, занимается предметами своего класса лишь из боязни наказания; либо, и это наиболее часто, он выполнял лишь первую половину своих заданий, либо исполнял их небрежно и наскоро, а что касается нескольких латинских рассказов, то он только списывал тему.

Его честолюбие, его оригинальность, часто аффектированная, и странности его характера отделяют его от товарищей.

Другие отметки для третьего триместра отсутствуют.

1827–1828 г. КЛАСС РИТОРИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ КЛАСС

1-й триместр

Учебные отметки. Поведение достаточно хорошее. Несколько легкомыслен. Характер, в котором я неуверен, что сумел уловить все его черты; но я вижу преобладающим в нем большое самолюбие. Я не предполагаю в нем порочных наклонностей. Его способности кажутся мне действительно выходящими из ряда и, как я считаю, столь же к литературе, как и к математике. Но до сего дня он очень запустил классные задания; вот почему он не получил первого места за сочинение. Он, кажется, решил отныне отдавать больше времени и больше стараний классу риторики; мы вместе составили распределение времени. Посмотрим, сдержит ли он перед самим собой свое слово. Он, кажется, не лишен религиозных чувств. Здоровье хорошее, но хрупкое.

Риторика

Примечание Пьерро. Работает для меня мало, часто разговаривает. Его способности, в которые полагается верить, хотя я еще не имею никакого доказательства их,

не приводят его ни к чему: в его работах нет и следа чего-либо другого кроме причудливости и небрежности.

Примечание Деформа. Всегда занят тем, чего не нужн делать. Опускается с каждым днем.

Математический подготовительный класс

Примечание Вернье. Усердие и успехи чрезвычайно заметные.

2-й триместр

Учебные отметки. Поведение очень плохое, характер мало открытый. Он оригинальничает. Способности у него выдающиеся, но он не хочет их применять к риторике. Он абсолютно ничего не делает для класса. Страсть к математике владеет им; я думаю, для него было бы лучше, если бы его родители согласились, чтобы он занимался только этой наукой: здесь он теряет свое время и только изводит своих учителей и навлекает на себя наказания. Он не выказывает себя лишенным религиозных чувств; его здоровье кажется слабым.

Риторика

Примечание Пьерро. Выполнил несколько заданий. Впрочем болтал, как обычно.

Примечание Деформа. Рассеянный, болтливый. Старался, как мне кажется, досаждать мне, и был бы плохим примером, если бы имел некоторое влияние на своих товарищей.

Математический подготовительный класс

Примечание Вернье. Умный; заметные успехи. Недостаточно методичен.

3-й триместр

Учебные отметки. Поведение плохое, характер трудно определить. Оригинальничает. Способности у него очень выдающиеся; он мог бы очень хорошо заниматься по ри то

рике, если бы хотел работать, но, увлеченный своей страстью к математике, он совершенно пренебрегал всем остальным. Поэтому не сделал никаких успехов. Я не думаю, чтобы он был лишен религиозных чувств. Его поведение в часовне не всегда безупречно. Здоровье хорошее.

Риторика

Примечание Пьерро. Довольно хорошее поведение, но мало работал: последние дни работал лучше.

Примечание Деформа. Демонстративно занимается не тем, чем нужно. Без сомнения, с этим умыслом он так часто болтает. Он протестует против молчания.

Математический подготовительный класс

Примечание Вернье. Имеет расположение к этой дисциплине. Успехи, которые были бы большими, если бы этот ученик работал с большей системой.

1828—1829 г. СПЕЦИАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КЛАСС

1-й триместр

Учебные отметки. Поведение неровное и часто заслуживающее порицания; он работал с жаром, его способности изумительны, успехи быстрые. Его характер очень неровен: временами мягкий и рассудительный, он иногда становится чрезвычайно неприятным. Во время отправления религиозных обрядов держит себя сносно. С некоторого времени у него болят уши.

Математика

Примечание Ришара. Этот воспитанник имеет явное превосходство над всеми своими соучениками.

Химия

Примечание Тиея. Рассеянный; работа слабая.

Физика

Примечание Тиея. Рассеянность; работа ничтожная.

2-й триместр

Учебные отметки. Ведет себя в общем хорошо; однако временами его поведение заслуживает порицания; он работает много и одарен большими способностями и удивительной легкостью восприятия. Его успехи соответствуют его работе и его способностям. Имеет странности в характере; иногда легкомыслен, а часто кажется рассудительным. Во время религиозных обрядов держится довольно хорошо. Здоровье хорошее.

Математика

Примечание Ришара. Этот воспитанник работает только в высших областях математики.

Физика

Примечание Тиея. Поведение сносное, работы никакой.

Химия

Примечание Тиея. Поведение сносное, работы никакой.

3-й триместр

Учебные отметки. Его поведение по временам довольно хорошее, а время от времени очень плохое. Его склонности к наукам известны. Когда он за работой, он занимается исключительно ею и редко теряет свое время. Его успехи пропорциональны размеру его способностей и любви к наукам. Его характер странный, и он аффектирует свои странности более, чем они у него имеются в действительности. Его манера держать себя при религиозных обрядах не всегда так хороша, как можно было бы желать. Здоровье его хорошее.

Математика

Примечание Ришара. Поведение хорошее, работа удовлетворительная.

Физика

Примечание Тиея. Очень рассеянный, совершенно не работает.

Химия

Примечание Тиея. Очень рассеянный, совершенно не работает.

III

СТАТЬЯ ИЗ GAZETTE DES ÉCOLES ОТ 5 ДЕКАБРЯ 1830 г., В КОТОРУЮ БЫЛО ВСТАВЛЕНО ПИСЬМО ГАЛУА, ПОСЛУЖИВШЕЕ МОТИВОМ ЕГО УВОЛЬНЕНИЯ ИЗ НОРМАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Возражение г-ну Гиньо и Lycée.

... Теперь объясним себе яснее неудовольствие г-на Гиньо по нашему адресу.

Решительно г-н Гиньо обижен тем, что мы его назвали *изысканный директор Нормальной школы.* Господин Гиньо желает иметь язык, тон, все манеры доктринеров, даже «салон», и чтобы мы не заикались об этом. Считаем себя предупрежденными. Таким образом мы не позволим себе больше на его счет этих *грубых личных намеков, которые общественное целомудрие неоднократно уже осуждало*; мы прекрасно понимаем, что личные намеки всегда будут казаться очень грубыми людям, которые желают спокойно итти своей дорогой без того, чтобы за ними наблюдали; в будущем, если мы увидим кого-либо, расталкивающего направо и налево встречных и опрокидывающего все, что лежит на его дороге, мы сделаем вид, будто ничего не видели и возьмем нашу лорнетку, чтобы доказать, что мы близоруки; вместо того, чтобы грубо сказать г-ну Гиньо, что он воспользовался болезнью г-на Гиббона, директора по учебным делам Подготовительной школы, для того, чтобы проскользнуть на его место, мы смутно выразимся насчет карьеристов и интриганов; вместо того чтобы сказать, что г-н Гиньо, как только стал директором по учебным делам, сразу же стал ходатайствовать и добился звания директора школы, затем звания генерального инспектора по образованию; вместо того чтобы сказать, опять-таки *предположительно*, что он легко приспособился к званию главного советника Нормальной школы, что он был достаточно удачлив, чтобы добиться восстановления всех порядков на старый лад, — мы предпочтем порицать в общих словах слишком быстрое повышение в чинах; это никого не огорчит, и никто не будет печалиться; вместо того чтобы сказать, что, не довольствуясь всем этим, он старается обеспечить себе за счет других маленькие удобства жизни и что таким путем он хотел бы выставить из коллежа Plessis одного профессора, который занимает там даровую квартиру, мы будем хранить молчание, так как молчание более вежливо...

Мы не можем лучше дополнить наш ответ, как продолжив его письмом, которое мы только что получили [1]).

Примечание редактора. Публикуя это письмо, под которым мы вычеркнули подпись, хотя нам этого и не рекомендовали, мы должны заметить, что тотчас после памятных июльских дней г-н Гиньо опубликовал во всех газетах, что директор Нормальной школы *предоставил всех воспитанников в распоряжение временного правительства*!

IV

ПИСЬМА ГИНЬО МИНИСТРУ ПО ПОВОДУ ИСКЛЮЧЕНИЯ ГАЛУА

(Национальный архив, папка F17 70355)

1

Господин министр,

С глубокой скорбью я вижу себя вынужденным дать Вам отчет в одном мероприятии, которое я должен был взять на свою ответственность, и о немедленном утверждении которого я прошу Вас.

---

[1]) См. текст письма Галуа на стр. 287—288.

Я отослал из Нормальной школы и направил к его матери ученика Галуа из-за поступка, указанного в письме, которое я имел честь написать Вам третьего дня. Как показания нескольких его товарищей, так и полное беззастенчивости признание, сделанное им после тщетных попыток запирательства перед г-ном Жюмель, одним из надзирателей, и передо мной, показали, что этот ученик является автором кляузы, которая в прошлое воскресенье вызвала негодование всей школы. Речь идет об одном письме, помещенном в номере от того же дня Gazette des Écoles, — приходится назвать ее полным именем, и всеми буквами подписанное: *Ученик Нормальной школы*. Это письмо показалось всем, кто его читал и кто мне о нем говорил, слишком серьезно компрометирующим самую честь школы, чтобы я оставил его без последствий. Впрочем, ученики с первого момента взяли в свои руки инициативу единодушного опровержения, которое могло удовлетворить их совесть, но которое не удовлетворяло ни справедливости, ни моего достоинства.

«Gazette» в своем сегодняшнем номере отклонила это опровержение; с другой стороны, Галуа был указан мне, судя по всем признакам, как автор письма, и я считал, что не подобает оставлять дальше целую школу под гнетом вины одного ученика и что с момента обнаружения виновного я и он, мы не могли оставаться вместе под одной кровлей. Итак, я его исключил на свой страх и риск и я это сделал поздно, так как в течение последнего года я был раз двадцать искушаем это сделать.

Действительно, Галуа — единственный ученик, на которого я с самого его поступления имел почти непрерывные жалобы как со стороны преподавателей, так и со стороны надзирателей. Но, будучи слишком убежден в его неоспоримом математическом таланте, и не доверяя собственным впечатлениям, так как я уже имел повод к личному недовольству против него, я терпел погрешности его поведения, его нерадение, его несговорчивый характер, не в

надежде на его исправление, а в надежде довести его до конца этих двух лет, чтобы не лишить университет того, что́ он имел право ожидать от него, и чтобы не повергнуть в горесть мать, которая, как я знал, имела нужду рассчитывать на будущность своего сына. Все мои усилия были бесполезными, и как я ни пренебрегал полученными оскорблениями, уже в последнее воскресенье я убедился, что зло непоправимо; у молодого человека нет нравственных чувств и, быть может, уже с давних пор.

Это вовсе не мне, лично оскорбленному в Gazette des Écoles, подобает, господин Министр, подстрекать к мерам, которые бы положили конец описанному публичному скандалу, ежедневно производимому в самом сердце университета этим листком. Но, да будет мне дозволено, как начальнику первого университетского учебного заведения, сожалеть об открытых происках, которые стремятся лишь к тому, чтобы посеять рознь между преподавателями и воспитанниками, среди самих учеников и сеять повсюду недоверие и раздор.

Не то, чтобы Нормальная школа боялась этих жалких подстрекательств: настоящее обстоятельство обнаружило превосходное состояние духа молодых людей, которые в ней учатся; они себя вели с твердостью, полной скромности и чуткости; я могу отвечать за них, как они отвечают за меня. Но зло, только что изгнанное, которое проникло к нам, распространяется в других заведениях, где оно совсем не находит противовеса в возрасте и развитии. Мы уже видели его плачевные результаты. Я кончаю, господин Министр; эксцессы, о которых я говорю, не могли пройти мимо Вашего внимания. Без сомнения, вскоре меры, которые вправе ожидать от высшего шефа университета, создадут дисциплину, без которой не могут происходить занятия и которая для нас является условием работы, как порядок является условием свободы...

(*На полях этого письма находится набросок постановления об исключении Галуа, сделанный рукой Кузена.*)

2

14 декабря Гиньо отправил министру новое письмо для того, чтобы переслать ему копию одного письма, «посланного в «Gazette», через посредство своих товарищей, одним из наших лучших учеников, принятых в этом году..., молодым человеком, столь же выдающимся по характеру, как и по таланту, несколько раз заслужившим быть хранителем моих наиболее тайных мыслей в продолжение этих трудных времен, которые мы вместе пережили».

ПИСЬМО БАХА

... Все мои старшие товарищи знают, как и я, что непоколебимая твердость г-на Гиньо была единственной опорой школы в эти столь трудные времена; они все знают, что если с 8 августа 1829 г. г-н Гиньо не сложил с себя своих обязанностей директора, то это только в интересах школы; они знают, что мы все рассматривали бы уход г-на Гиньо как сигнал к нашему рассеянию, так как вместе с ним исчезла бы из школы свобода.

После того, как г-н Гиньо узнал об ордонансах, ниспровергающих конституцию, он неоднократно призывал меня с несколькими из моих товарищей, выбранными как среди старых, так и среди новых учеников; он сказал нам, что между страной и правительством завязалась долгая и ужасная борьба; что, какова бы ни была судьба школы, наше место в этой борьбе предуказано, что мы должны посвятить себя торжеству либеральных идей и т. д. Он не мог тогда предвидеть, что народ через три дня накажет клятвопреступника и завоюет свободу.

28 июля, узнав, что несколько учеников желали итти в огонь, и считая себя ответственным перед их родителями за все, что может с ними случиться, он явился в 5 ч. 30 м. утра в залу, и там, далекий от того, чтобы дважды угрожать вызовом жандармерии для восстановления порядка, который и не был нарушен, он удовлетворился тем, что взял честное слово с тех, кто желал отправиться, что они не приведут свой проект в исполнение до завтрашнего дня и что даже тогда они не отправятся, не предупредив его; он прибавил, правда, что в качестве начальника заведения он мог бы потребовать вмешательства вооруженной силы (жандармерии, если хотите), но что мы должны знать, как далека подобная мера от его взглядов.

Что касается второй фразы, которую ему приписывают, то она частью верна, частью ложна; он сказал, что множество храбрых хороших людей были убиты с одной и другой стороны, но он не прибавил, что если бы он был военным, он не знал бы, на что решиться; он только признавал вместе со всеми, что положение военных было очень затруднительным, так как они видели себя поставленными перед альтернативой либо жертвовать свободой, либо пренебречь присягой, которая их удерживала под знаменами... Что касается легитимности, то совершенно неверно, что г-н Гиньо в этом случае говорил о ней; мне кажется даже, что я не слышал от него этого слова в продолжение всего времени, которое я провел в школе.

Сколько фраз, столько и лжи: так, опять неверно, что когда победа определилась, г-н Гиньо поспешил надеть на свою шляпу огромную трехцветную кокарду: пять учеников были указаны своими товарищами для того, чтобы нести к могиле тело юного Фарси, убитого в июльские дни. Я был в числе этих учеников. Мы отправились к директору, который должен был участвовать вместе с нами в похоронной процессии; мы все надели национальные цвета; один он не имел кокарды: «Господа, — сказал он нам, — вы опередили меня, но уже много времени как мы ее носим в нашем сердце; можно ее носить и там». Мы все знали, что он говорил правду...

V

ПОСТАНОВЛЕНИЕ ОБ ИСКЛЮЧЕНИИ ГАЛУА, ЗАНЕСЕННОЕ В РЕЕСТР КОРОЛЕВСКОГО СОВЕТА НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ 4-го ЯНВАРЯ 1831 г.

(Архив министерства народного просвещения)

По рапорту г-на советника Кузена

Приняв во внимание рапорт г-на Гиньо, директора Нормальной школы, относительно предварительного увольнения Галуа и мотивов в его подтверждение,

Постановили:

Галуа немедленно оставить Нормальную школу.

Вынести в дальнейшем решение по поводу места его назначения.

VI

ПОСЛЕДНЯЯ ТЮРЕМНАЯ ЗАПИСЬ О ГАЛУА В SAINTE-PÉLAGIE

№ 15438 Галуа Эварист.

Заключен 17 декабря 1831 г.

Осужден 3 декабря 1831 г. Королевским судом, за ношение запрещенного оружия и т. д. на заключение на шесть месяцев.

По его заявлению ему 20 лет.

Профессия — репетитор.

Уроженец г. Bourg-la-Reine, департамента Сены

По апелляции, поданной названным Эваристом Галуа, уроженцем Bourg-la-Reine, репетитором, проживающим в доме № 16 по улице Bernardins, на приговор, вынесенный парижским судом исправительной полиции 29 октября 1831 г., который объявил его виновным в ношении костюма, на который он не имел прав, и запрещенного оружия, и по 259-й и 314-й статьям уголовного кодекса приговорил его к шести месяцам тюрьмы и уплате судебных издержек,—Королевский суд Парижа, камера апелляций исправительной полиции, постановлением от 3 декабря, подтвердила без оговорок вышеизложенный приговор.

Верно с подлинником, предъявленным главному прокурору по его требованию.

Гл. секретарь ЛОТ.

и Уазы. В момент ареста проживал в Париже, ул. Bernardins, № 16. Переведен из Консьержери [1]),

Приметы:

Рост	1,67 *см*
Волосы	темнорусые.
Брови	такие же.
Лоб	четырехугольный.
Глаза	карие.
Нос	крупный.
Рот	маленький.
Подбородок	круглый.
Лицо	овальное.

Двадцать второго января тысяча восемьсот тридцать второго года вышеназванный был по распоряжению префекта полиции переведен в Форс [1]).

Возвращен 31 января 1832 г.

Переведен в больницу господина Faultrier, ул. Oursine, № 86, 16 марта 1832 г.

Подпись: АФФРОЙ.

[1]) Тюрьма в Париже. (*Прим. пер.*)

VII

АКТ О СМЕРТИ ГАЛУА

(Архив Префектуры Сены.
Восстановлен по гражданским актам.)

(*Засвидетельствованная копия, выданная во исполнение закона от* 12 *февраля* 1872 *г. на негербовой бумаге, Бурне-де-Верраном, нотариусом Парижа,* 30 *декабря тысяча восемьсот семьдесят второго года, с аутентичной копии акта о смерти, прикрепленной к первой копии, находящейся у него, снятая с достоверного документа, полученного* 31 *марта* 1848 *г. от Бурне-де-Веррана.*)

Выписка из реестра актов о смерти 12-й мэрии 1 июня 1832 г., в полдень. Акт о смерти Эвариста Галуа, умершего вчера в 10 час. утра, в Париже, в госпитале Cochin, в возрасте двадцати одного года, математика, уроженца города Bourg-la-Reine (Сена), холостого, сына покойного Николая Габриеля Галуа и Аделаиды-Мари Демант. По показанию Поля Сильвестра 38 лет и Шарля Шапе 26 лет, служащих вышеупомянутого госпиталя, там же проживающих, которые подписались после прочтения в нашем присутствии, мэра 12-го округа Парижа, вышеуказанного акта. — Подпись: Сильвестр, Шапе и Огюст Салеран, мэр.

Верно с копией.
Париж, 29 марта 1848 г.

Мэр 12-го округа. Выдано и проверено:
Подпись: *Горисе.* *Бурне-де-Верран.*

VIII

ПРОТОКОЛ ВСКРЫТИЯ ГАЛУА

(Gazette des Hôpitaux от 7 июня 1832 г.)
Госпиталь Cochin

Юный Эварист Галуа, двадцати одного года, хороший математик, кроме того, известный своим пылким воображением, умер в 12 час. от острого перитонита, вызванного пулей, выпущенной с 25 шагов.

По вскрытии трупа, произведенном спустя 24 часа, [обнаружен] обширный кровоподтек в области волосяного покрова кожи.

По удалении покрова черепа обнаружилось, что обе части, образующие лобную кость у ребенка, сходятся под тупым углом. Эта кость имеет самое большее две с половиной линии [линия равна 2,7 *мм*]. Край лобной кости, соединяясь с теменными, представляет собою довольно глубокое, уплощенное, округленное вдавление по ходу соединения костей между собой; теменные бугры очень развиты, удалены друг от друга; развитие этой части очень значительно по сравнению с развитием затылочной кости, которая очень мала. Толщина затылочной кости самое большее три линии.

Снятый кругообразным распилом свод черепа представляет спереди переднюю и заднюю стенки лобных синусов очень сближенными, свободное пространство менее двух линий; посреди свода два углубления соответствуют вышеописанным данным.

На основании черепа передние ямки сильно выдаются за счет атрофии лобных синусов. Боковые отделы средней черепной ямки глубоки и утонченная пирамида височной кости мало объемиста; затылочные ямки малы.

Мозг тяжел, его извилины широки, его борозды глубоки, особенно в боковых отделах; возвышения соответствуют впадинам черепа, по одному впереди каждой передней доли, два у вершины верхней поверхности; мозговое вещество в общем мягкое; полости желудочков малы, без спинномозговой жидкости; шишковидная железа объемиста, содержит несколько серых грануляций; мозжечек мал; вес мозга и мозжечка три фунта [фунт, употреблявшийся в медицинской практике, равен 373 *г*; возможно, что здесь указан торговый фунт, равный 453,59 *г*.] две унции минус одна драхма.

Галуа, стоявший в профиль, получил пулю на расстоянии одного дюйма ко внутри от передней верхней ости подвздошной кости правой стороны; она прошла внутренние брюшные органы, прошла через мускулы поясничный и подвздошный, а также подвздошную кость, и выступила под кожей между средней и большой ягодичными мышцами. На своем пути она ранила восходящие ветви передней подвздошной артерии, пробила слепую кишку, также среднюю часть тонких кишек, задела нисходящую ободочную кишку, которую она прорвала, и прошла через подвздошную кость левой стороны, которую она раздробила (с осколками к наружи). На углах осколков видны остатки свинца, а на пуле — борозды, которые эти углы провели. В малый таз вылилось шесть унций крови; спайки уже соединяли кишки с брюшиной, которая была испещрена красными точками.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	5
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ГАЛУА	13
Статьи, опубликованные Галуа	15
Доказательство одной теоремы из теории непрерывных дробей	15
Заметки по некоторым пунктам анализа	26
Анализ одного мемуара об алгебраическом решении уравнений	29
Заметка о решении численных уравнений	32
Из теории чисел	35
Посмертные работы Галуа	48
Письмо Огюсту Шевалье	4
Мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах	6(
Примитивные уравнения, которые разрешаются в радикалах	85
Отрывки, опубликованные Ж. Таннери	100
А. Предисловие	100
В	102
С. Два мемуара по чистому анализу, Э. Галуа	103

D. Математические науки. Рассуждения о прогрессе чистого анализа — 107
E — 109
F — 110
G Науки. Иерархия. Школы — 111
H — 113
I — 117
J — 119
K — 123
L — 125
M Заметка — 125
N Добавление к мемуару о решении уравнений — 126
O — 128
P Об интегрировании линейных уравнений — 136
Q Исследование поверхностей второго порядка — 136

Н. Г. Чеботарев. Примечания к сочинениям Галуа 137

Н. Г. ЧЕБОТАРЕВ. ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ГАЛУА — 183

§ 1. Основы теории Галуа — 185
§ 2. Уравнения с заданной группой — 196
§ 3. Об аналитической форме простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок 208
§ 4. Проблема резольвент — 217
§ 5. Дальнейшие вопросы общей теории полей — 232
Литература — 248

ДЮПЮИ — ЖИЗНЬ ЭВАРИСТА ГАЛУА — 257

Документы — 317

Сдано в набор 15/III 1936 г.
Поступило к печати 16/IX 1936 г.
Формат бум. 72×105.
Количество бум. листов 10½+5 вкл.
Уч.-авторских л. 12,5.
Количество печ. знаков в 1 бум. л. 118400.
Уполномоченный Главлита № В-46045.

Заказ № 360.
Тираж 3000 экз.
Изд. № 18.

4-я тип. ОНТИ НКТП СССР «Красный Печатник». Ленинград, Международный, 75а.

ОПЕЧАТКИ

к книге Галуа „Классики естествознания"

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
6	2 снизу	Traite	Traité
12	10 сверху	centennaire	centenaire
34	6 „	$\frac{nx - xX'}{kx^{n+1}} < 1$	$\frac{nX - xX'}{kx^{n+1}} < 1$
137	5 „	(стр. 9, 22)	(стр. 22)
137	11 „	аналое	анало-
156	4 снизу	вследствие	впоследствии
166	1 сверху	(стр. 67)	(стр. 68)
179	9 снизу	(к стр. 127)	(к стр. 126)
200	3 сверху	$\Sigma_\gamma^{-1} \mathfrak{A} \Sigma_\gamma^{-1} \mathfrak{A} \Sigma_\gamma$	$\Sigma_\gamma^{-1} \mathfrak{A} \Sigma_\gamma$
202	(конец строки) 14 сверху	(mod p^j)	(mod p_j)
205	(конец строки) 16 снизу	групп	группа
257	3 „	P. D upuy, Lavie d'Évariste Galois, Annales seien tifi-	P. Dupuy, La vie d'Évariste Galois, Annales scientifi-
291	10 „	des École	des Écoles
335	5 „	65	85